Parcial 3 de Particulas

Sergio Gutierrez

November 2016

1.

1.1.

Tenemos las siguientes definiciones que se cumplen independiente mente de la selección de base para las matrices γ:

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^3\gamma^3 \ , \ (\gamma_5)^2 = \mathbb{1} \tag{1}$$

El operador proyección: $P_\pm = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \gamma_5)$ entonces es de interés calcular $(P_\pm)^2$:

$$(P_\pm)^2 = \frac{1}{4}(\mathbb{1} \pm \gamma_5)(\mathbb{1} \pm \gamma_5) = \frac{1}{4}(\mathbb{1} \pm 2\gamma_5 + (\gamma_5)^2) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \gamma_5)$$
$$(P_\pm)^2 = (P_\pm) \tag{2}$$

1.2.

Para la representación de altas energías es lo mismo que hacer una transformación de la representación en la base de Dirac o estándard a la base de Weyl. Recordemos la definicion de las matrices gamma en la base de Dirac.

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{bmatrix} \ , \ \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix} \ , \ \gamma_5 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Ahora si queremos hacer el cambio de base podemos aplicar una transformacion $\gamma \to S\ \gamma S^{-1}$ la transformacion que se va a aplicar es la que se uso en clase:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \ , \ S = S^{-1} \tag{4}$$

Calculemos explicitamnte la tranformacion de γ^0, γ^i:

$$\gamma^0_{HE} = S\gamma^0 S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix}$$

La transformacion de γ^i es facil de ver que queda igual puesto que,
$\nu = \mu \to \gamma^i_{\mu\nu} = 0$, $\nu \neq \mu \to \gamma^i_{\mu\nu} = \sigma^i$ entonces al aplicar S solo va a multiplicar por la unidad asi que las matrices γ^i son invariantes bajo esta cambio de base. Entonces la forma de las matrices γ para alatas energias son:

$$\gamma^0_{HE} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \ , \ \gamma^i_{HE} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Ahora la transformación de γ_5 : $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \ , \ \gamma'_5 = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

1.3.

ahora para encontrar los estados propios $P_\pm u(p)$ en esta nueva base también tenemos que aplicar la transformación para los valores propios en la base de Dirac que son:

$$u(p) = \sqrt{E_p + m}\begin{pmatrix} x \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m}x \end{pmatrix} \ , \ v(p) = \sqrt{E_p + m}\begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m}x \\ x \end{pmatrix} \tag{7}$$

Ahora si aplicamos la transformacion $u(p) \to S\ u(p)$:

$$S\ u(p) = \sqrt{\frac{E_p+m}{2}}\begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m}x \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{E_p+m}{2}}\begin{pmatrix} (1+\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m})x \\ (1-\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p+m})x \end{pmatrix}$$

Entonces si tomando el caso donde m $\ll E_P$:

$$u'(p) = \sqrt{\frac{E_p}{2}}\begin{pmatrix} (1+\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p})x \\ (1-\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p})x \end{pmatrix} \ , \ h = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_p} \tag{8}$$

Así que podemos ver que los vectores propios son tales que tiene $h = \pm 1$:

$$u_+(p) = \sqrt{\frac{E_p}{2}}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ u_-(p) = \sqrt{\frac{E_p}{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$u(p) = \alpha u_+(p) + \beta u_-(p) \tag{10}$$

1.4.

Definimos la funcion $\Gamma^\mu = (a+b)P_-\gamma^\mu P_+ + (a-b)P_+\gamma^\mu P_-$ Ahora mostremos que esta función puede ser escrita como una función con una dependencia vectoria y axcial :$a\mathbb{1} + b\gamma_5$.

$$\begin{aligned}
\Gamma^\mu &= (a+b)P_-\gamma^\mu P_+ + (a-b)P_+\gamma^\mu P_- \\
&= \frac{1}{4}(a+b)(1-\gamma_5)\gamma^\mu(1+\gamma_5) + \frac{1}{4}(a-b)(1+\gamma_5)\gamma^\mu(1-\gamma_5) \\
&= \frac{1}{4}(a+b)(\gamma^\mu - \gamma_5\gamma^\mu)(1+\gamma_5) + \frac{1}{4}(a-b)(\gamma^\mu + \gamma_5\gamma^\mu)(1-\gamma_5) \\
= \frac{1}{4}(a+b)(\gamma^\mu - \gamma_5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma_5 - \gamma_5\gamma^\mu\gamma_5) &+ \frac{1}{4}(a-b)(\gamma^\mu + \gamma_5\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma_5 - \gamma_5\gamma^\mu\gamma_5)
\end{aligned}$$

Ahora tengamos en cuenta unas propiedades de las matrices gamma:

$$\gamma_5, \gamma^\mu = \gamma_5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma_5 = 0 \ , \ \gamma_5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma_5 \ , \ \gamma_5^\dagger = \gamma_5 \ , \ \gamma_5\gamma^\mu\gamma_5 = -\gamma^\mu$$

Asi podemos reducir la ultima expresion a.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}(a+b)(2\gamma^\mu + 2\gamma^\mu\gamma_5) + \frac{1}{4}(a-b)(2\gamma^\mu + 2\gamma_5\gamma^\mu) \\
&\frac{1}{2}\left(a\gamma^\mu + a\gamma^\mu\gamma_5 + b\gamma^\mu + b\gamma^\mu\gamma_5 + a\gamma^\mu + a\gamma_5\gamma^\mu - b\gamma^\mu - b\gamma_5\gamma^\mu\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2a\gamma^\mu - 2b\gamma_5\gamma^\mu\right) = (a\mathbb{1} + b'\gamma_5)\gamma^\mu
\end{aligned}$$

Así que claramente la función gamma tiene una dependencia de una parte axial y vectorial.

$$\Gamma^\mu = (a\mathbb{1} + b\gamma_5)\gamma^\mu \tag{11}$$

2.

Tenmeos por definición la siguiente relación entré potenciales gauge definida en el libro Scheck:

$$\frac{1}{2}\left(D_\alpha\phi^0, D^\alpha\phi^0\right) = \frac{1}{2}\left(U\left(A_\alpha\right)\phi^0, U\left(A^\alpha\right)\phi^0\right) \tag{12}$$

$$U\left(A_\alpha\right)\phi^0 = -i\left\{g\sum_{k=1}^{3} U\left(T_k\right)A_\alpha^{(k)}(x) + \frac{1}{2}g'U\left(Y\right)A_\alpha^{(0)}(x)\right\}\phi^0 \tag{13}$$

Es importante hacer mención de la definición de Y en términos de T_0 la cual es: $Y := 2\frac{g}{g'}T_0$. Así haciendo alusión a la carga mientras, los campos pueden

ser neutros o cargados.La partícula mediadora esta definida por los campos cargados antes mencionados definida como:

$$W_\alpha^\pm = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_\alpha^{(1)} \pm iA_\alpha^{(2)}\right)\ ,\ A_\alpha^{(1)} = \sqrt{2}W_\alpha^- + iA_\alpha^{(2)}\ ,\ A_\alpha^{(2)} = \sqrt{2}W_\alpha^- + iA_\alpha^{(1)}$$

$$2A_\alpha^{(1)} = \sqrt{2}\left(-W_\alpha^+ + W_\alpha^-\right);\quad 2A_\alpha^{(2)} = \sqrt{2}i\left(W_\alpha^+ + W_\alpha^-\right)$$

Por otro lado los protones y neutrones estan defindos como:

$$A_\alpha^{(3)}(x) = \frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}\left\{gZ_\alpha(x) + g'A_\alpha(x)\right\} \tag{14}$$

$$A_\alpha^{(0)}(x) = \frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}\left\{-g'Z_\alpha(x) + gA_\alpha(x)\right\} \tag{15}$$

Expandimos la suma en la ecuación 13 y también vamos remplazando con la definiciones anteriores:

$$U\left(A_\alpha\right)\phi^0 = -i\left\{g\left[U\left(T_1\right)A_\alpha^{(1)}(x) + U\left(T_2\right)A_\alpha^{(2)}(x) + U\left(T_3\right)A_\alpha^{(3)}(x)\right] + \frac{1}{2}g'U\left(Y\right)A_\alpha^{(0)}(x)\right\}\phi^0$$

Utilizando la definición de A_α^1y A_α^2 para los primeros dos términos de la excreción anterior obtenemos :

$$U\left(T_1\right)A_\alpha^{(1)}(x) + U\left(T_2\right)A_\alpha^{(2)}(x) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}U\left(T_1\right)\left(-W_\alpha^+ + W_\alpha^-\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}U\left(T_2\right)\left(W_\alpha^+ + W_\alpha^-\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(W_\alpha^+\left\{-U\left(T_1\right) + iU\left(T_2\right)\right\} + W_\alpha^-\left\{U\left(T_1\right) + iU\left(T_2\right)\right\}\right)$$

$$\text{Cambiemos :1,2} \rightarrow \text{-,+} \quad = \frac{1}{2}\left(-U\left(T_-\right)W_\alpha^+ + U\left(T_+\right)W_\alpha^-\right)$$

Ahora miremos los ultimos dos terminos que no tratamos anterior mente y apliquemos los mismos remplazos:

$$gU\left(T_3\right)A_\alpha^3(x) + \frac{1}{2}g'U\left(Y\right)A_\alpha^0(x) =$$

$$\frac{gU\left(T_3\right)}{\sqrt{g^2+g'^2}}\left\{gZ_\alpha(x) + g'A_\alpha(x)\right\} + \frac{1}{2}g'U(Y)\frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}\left\{-g'Z_\alpha(x) + gA_\alpha(x)\right\}$$

$$= \frac{g^2U\left(T_3\right)Z_\alpha(x)}{\sqrt{g^2+g'^2}} + \frac{gg'A_\alpha(x)U\left(T_3\right)}{\sqrt{g^2+g'^2}} - \frac{g'^2U(Y)Z_\alpha(x)}{2\sqrt{g^2+g'^2}} + \frac{gg'A_\alpha(x)U(Y)}{2\sqrt{g^2+g'^2}}$$

$$= \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}\left(A_\alpha(x)U(T_3) + \frac{1}{2}A_\alpha(x)U(Y)\right) + \frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}\left(g^2U(T_3)Z_\alpha(x) - \frac{1}{2}g'^2U(Y)Z_\alpha(x)\right)$$

$$= \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}A_\alpha(x)U(T_3 + \frac{1}{2}Y) + \frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}\left(g^2U(T_3) - \frac{1}{2}g'^2U(Y)\right)Z_\alpha(x)$$

Ahora reescribamos la expresión completa de los dos términos calculados anteriormente.

$$U\left(A_\alpha\right)\phi^0 = i\left\{\frac{g}{\sqrt{2}}\left(-U\left(T_-\right)W_\alpha^+ + U\left(T_+\right)W_\alpha^-\right)\right.$$
$$\left. + \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}A_\alpha(x)U(T_3+\frac{1}{2}Y) + \frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}\left(g^2U(T_3) - \frac{1}{2}g'^2U(Y)\right)Z_\alpha(x)\right\}\phi^0$$
$$U(T_3) = t_3\ ,\ U(Y) = y = -2t_3$$
$$= i\left\{\left[\frac{g}{\sqrt{2}}\left(-U\left(T_-\right)W_\alpha^+ + U\left(T_+\right)W_\alpha^-\right)\right] + \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}A_\alpha(x)U(t_3-t_3)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}\left(g^2t_3 + g'^2t_3\right)Z_\alpha(x)\right\}\phi^0$$
$$U\left(A_\alpha\right)\phi^0 = i\left\{\left[\frac{g}{\sqrt{2}}\left(-U\left(T_-\right)W_\alpha^+ + U\left(T_+\right)W_\alpha^-\right)\right] + \frac{g^2+g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}t_3Z_\alpha(x)\right\}\phi^0$$

Como lo que nos interesa es la solución neutra de orden mas bajo entonces tomas la parte que no depende de los campos cargados así tenemos:

$$U\left(A_\alpha\right)\phi^0 = i\frac{g^2+g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}t_3Z_\alpha(x)\phi^0 = -t_3giA_\alpha^{(3)}(x)\phi^0 + t_3giA_\alpha^{(0)}(x)\phi^0$$
$$U\left(A_\alpha\right)\phi^0 = -it_3\left(gA_\alpha^{(3)} - g'A_\alpha^{(0)}\right)\phi^0 \Rightarrow U\left(A^\alpha\right) = -it_3\left(gA^{\alpha(3)} - g'A^{\alpha(0)}\right)\phi^0$$

Introducimos este resultado en la ecuación 12:

$$\frac{1}{2}\left(U\left(A_\alpha\right)\phi^0, U\left(A^\alpha\right)\phi^0\right) = \left(\phi^0,\phi^0\right)t_3^2\left(gA_\alpha^{(3)} - g'A_\alpha^{(0)}\right)\left(gA^{\alpha(3)} - g'A^{\alpha(0)}\right)$$
$$\left(D_\alpha\phi^0, D^\alpha\phi^0\right) = \left(\phi^0,\phi^0\right)t_3^2\left(gA_\alpha^{(3)} - g'A_\alpha^{(0)}\right)\left(gA^{\alpha(3)} - g'A^{\alpha(0)}\right)$$
$$\left(\phi^0,\phi^0\right)D_\alpha D^\alpha = \left(\phi^0,\phi^0\right)t_3^2\left(gA_\alpha^{(3)} - g'A_\alpha^{(0)}\right)\left(gA^{\alpha(3)} - g'A^{\alpha(0)}\right)$$
$$D^2 = g'^2A_\alpha^{(0)}A^{\alpha(0)} - g'gA_\alpha^{(3)}A^{\alpha(0)} - g'gA_\alpha^{(0)}A^{\alpha(3)} + g^2A_\alpha^{(3)}A^{\alpha(3)}$$

reagrupamos y aplicamos una contracción tenemos :

$$D^2 = \left(\phi^0,\phi^0\right)t_3^2M^2A_\alpha^{(i)}A^{\alpha(k)}$$

para los campos tenemos que i y k son 0 y 3. Podemos escribir explisitamente la matriz masa del gauge neutral de bossones a solo dos dimensiones:

$$M_{0,0}^2 = g'^2\ ,\ M_{0,3}^2 = -g'g\ ,\ M_{1,0}^2 = -gg'\ ,\ M_{3,3}^2 = g^2$$
$$M^2 = \left(\phi^0,\phi^0\right)t_3^2\begin{pmatrix} g'^2 & -g'g \\ -gg' & g^2\end{pmatrix}$$

Ahora busquemos los valores propios para encontraos los valores posibles de la partícula de interacción.

$$\begin{pmatrix} g'^2-\lambda & -g'g \\ -gg' & g^2-\lambda \end{pmatrix} \quad \mathcal{P} = (g'^2-\lambda)(g^2-\lambda) - g'^2g^2 = 0$$

$$\mathcal{P} = g'^2g^2 - g'^2\lambda - g^2\lambda - g'^2g^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - (g'^2+g^2) = 0$$

Asi que los valores propios de las masas son: $m_0 = 0$, $m_3^2 = \left(\phi^0, \phi^0\right) t_3^2(g'^2+g^2)$

3.

Ahora consideremos el decaimiento inverso de un moun el cual va a ser mediado por $\mathcal{W}$'s pero vamos considerar una interacción de la forma $\mathcal{H}_I = \frac{G_f}{\sqrt{2}} J^\alpha(x) J^\dagger_\alpha(x)$. Este proceso va seguir el siguiente decaimiento

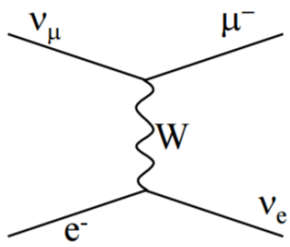


Figura 1: Decaimiento inverso de un Moun

Para esta particula mediadora que tiene masa y spin -1 tenemos que tener encuenta un propagador mas complejo que el que se utilizaba en QED.

$$\frac{-i(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu/M^2c^2)}{q^2 - M^2c^2} \longrightarrow \text{Propagador para } \mathcal{W}$$

pero como vamos a solucionar al orden mas bajo entonces podemos aplicar una aproximación experimental, $(Mc)^2 \gg q^2$ también recordemos el acople por vértice de orden mas bajo que definimos en clase :

$$\frac{ig_{\mu\nu}}{(Mc)^2} \ , \ \frac{-ig_W}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1-\gamma_5) \text{ (intercion debil o de contacto)} \tag{16}$$

Ahora plantemos la matrices de amplitud para esta interacción, recordemos que en la izquierda a derecha se plantean los vértices pero en cada vértice la derecha tenemos partícula que entre en dirección de la carga .

$$\mathcal{M} = \left[\bar{u}(\nu_e)\frac{-ig_w}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(e)\right]\frac{ig_{\mu\nu}}{(Mc)^2}\left[\bar{u}(\mu)\frac{-ig_W}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(\nu_\mu)\right]$$

$$g_{\mu\nu}\gamma^\mu = \gamma_\nu \quad \text{simplificando mas la expresion anterior}$$

$$= \frac{g_w^2}{8(Mc)^2}\left[\bar{u}(\nu_e)\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(e)\right]\left[\bar{u}(\mu)\gamma_\mu(1-\gamma_5)u(\nu_\mu)\right] \tag{17}$$

Ahora queremos promediar sobre los spins así que podemos aplicar el truco de casimir.

$$\sum_{spin}[\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\bar{u}(v)\Gamma_2 u(d)] = Tr[\Gamma_1(\not{p}_b + m_b c)\Gamma_2(\not{p}_a + m_a c)] \tag{18}$$

$$\sum_{spin}|\mathcal{M}|^2 = \frac{g_w^2}{8(Mc)^2}Tr\left[\gamma^\mu(1-\gamma_5)(\not{p}_e + m_e c)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\not{p}_{\nu_e}\right]$$
$$\times Tr\left[\gamma_\mu(1-\gamma_5)\not{p}_{\nu_\mu}\gamma_\mu(1-\gamma_5)(\not{p}_\mu + m_\mu c)\right]$$

Al calcular cada una de estas trazas vamos a utilizar las propiedades obtenidas en el Griffths en la sección 7.7

$$Tr\left[\gamma^\mu(1-\gamma_5)(\not{p}_e + m_e c)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\not{p}_{\nu_e}\right]$$
$$= Tr\left[(\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_5)(\not{p}_e + m_e c)(\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_5)\not{p}_{\nu_e}\right]$$
$$= Tr\left[(\gamma_\mu\not{p}_e - \gamma_\mu\gamma_5\not{p}_e + \gamma_\mu m_4 c - \gamma_\mu\gamma_5 m_e c)(\gamma_\mu\not{p}_{\nu_e} - \gamma_\mu\gamma_5\not{p}_{\nu_e})\right]$$
$$= Tr\left[(\gamma_\mu\not{p}_e\gamma_\mu\not{p}_{\nu_e} - \gamma_\mu\gamma_5\not{p}_e\gamma_\mu\not{p}_{\nu_e} + \gamma_\mu m_4 c\gamma_\mu\not{p}_{\nu_e} - \gamma_\mu\gamma_5 m_e c\gamma_\mu\not{p}_{\nu_e} - \gamma_\mu\not{p}_e\gamma_\mu\gamma_5\not{p}_{\nu_e}\right.$$
$$\left.+\gamma_\mu\gamma_5\not{p}_e\gamma_\mu\gamma_5\not{p}_{\nu_e} - \gamma_\mu m_4 c\gamma_\mu\gamma_5\not{p}_{\nu_e} + \gamma_\mu\gamma_5 m_e c\gamma_\mu\gamma_5\not{p}_{\nu_e}\right]$$
$$= Tr\left[\gamma_\mu\not{p}_e\gamma_\mu\not{p}_{\nu_e}\right] - Tr\left[\gamma_\mu\gamma_5\not{p}_e\gamma_\mu\not{p}_{\nu_e}\right]$$
$$+Tr\left[\gamma_\mu m_e c\gamma_\mu\not{p}_{\nu_e}\right] - Tr\left[\gamma_\mu\gamma_5 m_e c\gamma_\mu\not{p}_{\nu_e}\right] - Tr\left[\gamma_\mu\not{p}_e\gamma_\mu\gamma_5\not{p}_{\nu_e}\right]$$
$$+Tr\left[\gamma_\mu\gamma_5\not{p}_e\gamma_\mu\gamma_5\not{p}_{\nu_e}\right] - Tr\left[\gamma_\mu m_e c\gamma_\mu\gamma_5\not{p}_{\nu_e}\right] + Tr\left[\gamma_\mu\gamma_5 m_e c\gamma_\mu\gamma_5\not{p}_{\nu_e}\right]$$

Con las propiedad de contracción de las matrices es fácil ver que varios de estos términos de las trazas son cero porque primero se cancelan mutuamente al aplicar al cambio de signo $\gamma^\mu\not{s}\gamma_m u = -\gamma_\mu\not{s}\gamma^m u$ además también por propiedades de tarasas $Tr[\gamma_5\not{a}\not{b}] = 0$ que también simplifica otros términos de la traza. Para simplificar y hacer mas simple a la vista vamos a cambia la notcion un poco, $e \to 1$, $\nu_\mu \to 2$, $\mu \to 3$, $\nu_e \to 4$ asi que tenemos:

$$Tr\left[\gamma^\mu(1-\gamma_5)(\not{p}_e + m_e c)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\not{p}_{\nu_e}\right] =$$
$$8\left(p_{2\mu}p_{4\nu} + p_{2\nu}p_{4\mu} - g_{\mu\nu}(p_2\cdot p_4) - i\epsilon_{\mu\nu\lambda\theta}p_2^\lambda p_4^\theta\right) \tag{19}$$

Haciendo un procedimiento análogo al que se a hecho para la segunda traza se deduce que:

$$Tr\left[\gamma_\mu(1-\gamma_5)\not{p}_{\nu_\mu}\gamma_\mu(1-\gamma_5)(\not{p}_\mu + m_\mu c)\right] =$$
$$8\left(p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu - g^{\mu\nu}p_1\cdot p_3 - ie\epsilon^{\mu\nu\lambda\theta}p_{1\lambda}p_{3\theta}\right) \tag{20}$$

Podemos concluir que el valor de la sudatoria sobre los spins de mi matriz termina siendo:

$$\sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 = \left(\frac{g_W^2}{8M^2c^2}\right)^2 8\left(p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu - g^{\mu\nu} p_1 \cdot p_3 - i\epsilon^{\mu\nu\lambda\theta} p_{1\lambda} p_{3\theta}\right) \times 8\left(p_{2\mu} p_{4\nu} + p_{2\nu} p_{4\mu} - g_{\mu\nu}(p_2 \cdot p_4) - i\epsilon_{\mu\nu\lambda\theta} p_2^\lambda p_4^\theta\right)$$

Multiplicamos termino a termino y utilizanod el álgebra de Lorentz tenemos:

$$\begin{aligned} &= 64(p_1^\mu p_3^\nu p_{2\mu} p_{4\nu} + p_1^\nu p_3^\mu p_{2\nu} p_{4\mu} + 4g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}(p_2 \cdot p_4)(p_1 \cdot p_3) \\ &\qquad - 2\epsilon_{\mu\nu\lambda\theta}\epsilon^{\mu\nu\lambda\theta} p_{1\lambda} p_{3\theta} p_2^\lambda p_4^\theta) \\ &= 64(2p_1^\mu p_3^\nu p_{2\mu} p_{4\nu} + 16(p_2 \cdot p_4)(p_1 \cdot p_3) - 2\epsilon_{\mu\nu\lambda\theta}\epsilon^{\mu\nu\lambda\theta} p_{1\lambda} p_{3\theta} p_2^\lambda p_4^\theta) \\ &= 256(p_2 \cdot p_4)(p_1 \cdot p_3) \end{aligned}$$

Asi que si recapitulamos un poco con los últimos valores encontrados podemos ver que

$$\sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 = \left(\frac{g_W^2}{8M^2c^2}\right)^2 256(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4)$$

Si consideramos los momentos en el centro de mas y hacemos la aproximación de que todos las masa de las partículas son mucho menor a las del neutrón mounico o el moun tenemos $p_1 \cdot p_2 \ll p_3 \cdot p_4 \rightarrow p_3 = p_4$ además sabemos que $p^2 = E^2/c^2 - (mc^2)^2$ así que es claro:

$$\sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 = \left(\frac{g_W^2}{8M^2c^2}\right)^2 256(p_3 \cdot p_4) = 8\left(\frac{g_W^2 E^2}{M^2c^4}\right)^2 \left\{1 - \left(\frac{m_3c^2}{2E}\right)^2\right\}$$

Así que utilizando la formula que dedujimos en una tarea para la seccion transversal diferencial podemos calcual la sección transversal con respecto a unangulo solid.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 |E_1|^2} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 \tag{21}$$

$$= \frac{1}{64\pi^2 |E_1|^2} 4\left(\frac{g_W^2 E^2}{M^2c^4}\right)^2 \left\{1 - \left(\frac{m_3c^2}{2E}\right)^2\right\} \tag{22}$$

Por ultimo integrando sobre el angulo solido que me da una factro de 2π

$$\sigma = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{g_W^2 E\hbar c}{M^2c^4}\right]\left\{1 - \left(\frac{m_3c^2}{2E}\right)^2\right\} \tag{23}$$