Tarea 1 de partículas

Sergio Gutierrez - Javier Zúñiga -

18 de agosto de 2016

1. Punto 1

Teniendo en cuenta que: $L(u) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma u \\ \gamma u & 1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} u^2 \end{pmatrix}$ donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

Cuando realizamos el producto $L(u)L(v)$ obtenemos

$$L(u)L(v) = \begin{pmatrix} \gamma_u & \gamma_u u \\ \gamma_u u & 1 + \frac{{\gamma_u}^2}{1+\gamma_u} u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_v & \gamma_v v \\ \gamma_v v & 1 + \frac{{\gamma_v}^2}{1+\gamma_v} v^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_u\gamma_v + \gamma_u\gamma_v uv & \gamma_v\gamma_u v + \gamma_u u \left(1 + \frac{{\gamma_v}^2}{1+\gamma_v} v^2\right) \\ \gamma_u\gamma_v u + \gamma_v v \left(1 + \frac{{\gamma_u}^2}{1+\gamma_u} u^2\right) & uv\gamma_u\gamma_v + \left(1 + \frac{{\gamma_v}^2}{1+\gamma_v} v^2\right)\left(1 + \frac{{\gamma_u}^2}{1+\gamma_u} u^2\right) \end{pmatrix}$$

Llámese dicha matriz $L(w)$.

1.1. $L(w)_{11}$

Al explorar el termino $L(w)_{11}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} L_{11} &= \gamma_u\gamma_v + \gamma_u\gamma_v uv \\ m &= (1+uv)\,\gamma_u\gamma_v \\ &= (1+uv)\,\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \\ &= (1+uv)\,\frac{1}{\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}} \\ &= (1+uv)\,\frac{1}{\sqrt{1-(u^2+v^2)+u^2v^2}} \\ &= (1+uv)\,\frac{1}{\sqrt{1-(u+v)^2+2uv+u^2v^2}} \\ &= (1+uv)\,\frac{1}{\sqrt{(uv+1)^2-(u+v)^2}} \\ &= (1+uv)\,\frac{1}{(uv+1)\sqrt{1-\left(\frac{u+v}{uv+1}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u+v}{uv+1}\right)^2}} \end{aligned}$$

Si definimos w como $\frac{u+v}{uv+1}$ obtenemos $\gamma_w = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}$

1.2. $L(w)_{12}$

Al explorar el termino $L(w)_{12}$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
L(w)_{12} &= \gamma_v\gamma_u v + \gamma_u u\left(1+\tfrac{{\gamma_v}^2}{1+\gamma_v}v^2\right)\\
&= \gamma_v\gamma_u v + \gamma_u u\left(1+\tfrac{v^2}{1-v^2}\tfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}}\right)\\
&= \gamma_v\gamma_u v + \gamma_u u\left(1+\tfrac{v^2}{1-v^2}\tfrac{1-v^2}{1+\sqrt{1-v^2}}\tfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)\\
&= \gamma_v\gamma_u v + \gamma_u u\left(1+\tfrac{v^2}{(1-v^2)+\sqrt{1-v^2}}\right)\\
&= \gamma_v\gamma_u v + \gamma_u u\left(\tfrac{(1-v^2)+\sqrt{1-v^2})+v^2}{(1-v^2)+\sqrt{1-v^2}}\right)\\
&= \gamma_v\gamma_u v + \gamma_u u\left(\tfrac{(1+\sqrt{1-v^2})}{(1-v^2)+\sqrt{1-v^2}}\right)\\
&= \gamma_v\gamma_u v + \gamma_u u\left(\tfrac{(1+\sqrt{1-v^2})}{(\sqrt{1-v^2})(\sqrt{1-v^2}+1)}\right)\\
&= \gamma_v\gamma_u v + \gamma_u u\left(\tfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)\\
&= \gamma_v\gamma_u v + \gamma_u\gamma_v u\\
&= \gamma_v\gamma_u(u+v)\\
&= \gamma_v\gamma_u(u+v)(\tfrac{uv+1}{uv+1})\\
&= \gamma_v\gamma_u(uv+1)(\tfrac{u+v}{uv+1})\\
&= \gamma_w w
\end{aligned}$$

1.3. $L(w)_{21}$

La ecuación que rige esta componente es:

$$L(w)_{12} = \gamma_u\gamma_v u + \gamma_v v\left(1+\tfrac{{\gamma_u}^2}{1+\gamma_u}u^2\right)$$

Sin embargo, es posible ver que es exactamente la misma que la correspondiente a $L(w)_{12}$ por simetria, entonces es posible realizar el mismo procedimiento para demostrar finalmente que es igual a $\gamma_w w$.

1.4. $L(w)_{22}$

Utilizando la deducción del término $\left(1+\frac{{\gamma_v}^2}{1+\gamma_v}v^2\right)$ en $L(w)_{22}$ en L_{12} obtenemos:

$$\begin{aligned} L(w)_{22} &= uv\gamma_u\gamma_v + \left(1 + \tfrac{\gamma_v{}^2}{1+\gamma_v}v^2\right)\left(1 + \tfrac{\gamma_u{}^2}{1+\gamma_u}u^2\right) \\ &= uv\gamma_u\gamma_v + \gamma_u\gamma_v \\ &= \gamma_u\gamma_v(1+uv) \\ &= \gamma_w \\ \\ &= 1 + \tfrac{\gamma_w{}^2}{1+\gamma_w}w^2 \end{aligned}$$

Finalmente la matriz queda compuesta de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \gamma_w & \gamma_w w \\ \gamma_w w & 1 + \frac{\gamma_w{}^2}{1+\gamma_w}w^2 \end{pmatrix}$$

Lo que claramente es un "Boost", por ende se demostró que la composición de dos Boosts es nuevamente uno cuya velocidad es $\frac{u+v}{uv+1}$

notación Bra- Ket

Ahora, expresamos la matriz $L(v)$ de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\langle\vec{v}| \\ \gamma|\vec{v}\rangle & 1_{3x3} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}|\vec{v}\rangle\langle\vec{v}| \end{pmatrix}$$

Entonces $L(u)L(v)$ podemos reescribirlo como:

$$L(u)L(v) = \begin{pmatrix} \gamma_u & \gamma_u\langle\vec{u}| \\ \gamma_u|\vec{u}\rangle & 1_{3x3} + \frac{\gamma_u^2}{1+\gamma_u}|\vec{u}\rangle\langle\vec{u}| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_v & \gamma_v\langle\vec{v}| \\ \gamma_v|\vec{v}\rangle & 1_{3x3} + \frac{\gamma_v^2}{1+\gamma_v}|\vec{v}\rangle\langle\vec{v}| \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_u\gamma_v + \gamma_u\gamma_v\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle & \gamma_u\gamma_v\langle\vec{v}| + \gamma_u\langle\vec{u}|\left(1_{3x3} + \frac{\gamma_v^2}{1+\gamma_v}|\vec{v}\rangle\langle\vec{v}|\right) \\ \gamma_u\gamma_v|u\rangle + \gamma_v|\vec{v}\rangle\left(1_{3x3} + \frac{\gamma_u^2}{1+\gamma_u}|\vec{u}\rangle\langle\vec{u}|\right) & \gamma_u\gamma_v\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle + \left(1_{3x3} + \frac{\gamma_u^2}{1+\gamma_u}|\vec{u}\rangle\langle\vec{u}|\right)\left(1_{3x3} + \frac{\gamma_v^2}{1+\gamma_v}|\vec{v}\rangle\langle\vec{v}|\right) \end{pmatrix}$$

1.5. $L(w)_{11}$

En este punto tenemos que tener encuenta que debido a que el vector es paralelo $\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle = \langle\vec{v}|\vec{u}\rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ si estos fuesen anti paralelos tendiramos que $\langle\vec{v}|\vec{u}\rangle = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

$$
\begin{aligned}
L(w)_{11} &= \gamma_u\gamma_v + \gamma_u\gamma_v \langle\vec{u}|\vec{v}\rangle \\
&= \gamma_u\gamma_v + \gamma_u\gamma_v \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \\
&= \gamma_u\gamma_v(1 + \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{1-\|u\|^2}}\tfrac{1}{\sqrt{1-\|v\|^2}}(1 + \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|) \\
&= (1 + \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|)\tfrac{1}{\sqrt{1-(\|u\|^2+\|v\|^2)+\|u\|^2\|v\|^2}} \\
&= (1 + \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|)\tfrac{1}{\sqrt{1-(\|u\|+\|v\|)^2+2\|u\|\|v\|+\|u\|^2\|v\|^2}} \\
&= (1 + \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|)\tfrac{1}{\sqrt{(\|uv\|+1)^2-(\|u\|+\|v\|)^2}} \\
&= (1 + \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|)\tfrac{1}{(\|uv\|+1)\sqrt{1-\left(\frac{\|u\|+\|v\|}{\|uv\|+1}\right)^2}} \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\|u\|+\|v\|}{\|uv\|+1}\right)^2}}
\end{aligned}
$$

Definimos $\|w\| = \frac{\|u\|+\|v\|}{\|uv\|+1}$ entonces tiene estructura de γ_w

1.6. $L(w)_{12}$

$$
\begin{aligned}
L(w)_{12} &= \gamma_u\gamma_v \langle\vec{v}| + \gamma_u \langle\vec{u}| \left(1_{3x3} + \tfrac{\gamma_v^2}{1+\gamma_v} |\vec{v}\rangle \langle\vec{v}|\right) \\
&= \gamma_u\gamma_v \langle\vec{v}| + \gamma_u \langle\vec{u}| + \tfrac{\gamma_v^2\gamma_u}{1+\gamma_v} \langle\vec{u}|\vec{v}\rangle \langle\vec{v}|
\end{aligned}
$$

Explorando el término $\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle \langle v|$:

$$
\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle \langle u| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \langle v|
$$

Utilizando el hecho de que nuestro sistema de coordenadas puede ser escogido a conveniencia, lo ubicamos tal que la primera coordenada del componente espacial coincida con la primera coordenada de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, entonces sus coordenadas en ese marco son: $\vec{u} = (u_1, 0, 0); \vec{v} = (v_1, 0, 0)$ por tanto al retomar la ecuación anterior:

$$
\begin{aligned}
\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle \langle v| &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \langle v| \\
\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle \langle v| &= u_1v_1 \langle(v_1, 0, 0| \\
\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle \langle v| &= \langle(v_1u_1v_1, 0, 0| \\
\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle \langle v| &= v_1^2 \langle(u_1, 0, 0)| \\
\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle \langle v| &= \langle\vec{v}|\vec{v}\rangle \langle\vec{u_1}|
\end{aligned}
$$

Volviendo a la ecuación de $L(w)_{12}$:

$$\begin{aligned} L(w)_{12} &= \gamma_u\gamma_v \langle\vec{v}| + \gamma_u \langle\vec{u}| + \tfrac{\gamma_v^2\gamma_u}{1+\gamma_v} \langle\vec{u}|\vec{v}\rangle \langle\vec{v}| \\ &= \gamma_u\gamma_v \langle\vec{v}| + \gamma_u \langle\vec{u}| + \tfrac{\gamma_v^2\gamma_u}{1+\gamma_v} \langle\vec{v}|\vec{v}\rangle \langle\vec{u}| \\ &= \gamma_u\gamma_v \langle\vec{v}| + \gamma_u \langle\vec{u}| (1 + \tfrac{\gamma_v^2}{1+\gamma_v}\|v\|^2) \end{aligned}$$

exploremos $1 + \frac{\gamma_v^2}{1+\gamma_v}\|v\|^2$

$$\begin{aligned} 1 + \tfrac{\gamma_v^2}{1+\gamma_v}\|v\|^2 &= 1 + \tfrac{1}{1-\|v\|^2} \tfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{1-\|v\|^2}}} \|v\|^2 \\ &= 1 + \tfrac{1}{1-\|v\|^2} \tfrac{\sqrt{1-\|v\|^2}}{\sqrt{1-\|v\|^2}+1} \|v\|^2 \\ &= 1 + \tfrac{\|v\|^2}{\sqrt{1-\|v\|^2}\left(\sqrt{1-\|v\|^2}+1\right)} \\ &= \tfrac{1-\|v\|^2+\sqrt{1-\|v\|^2}+\|v\|^2}{\sqrt{1-\|v\|^2}\left(\sqrt{1-\|v\|^2}+1\right)} \\ &= \tfrac{1+\sqrt{1-\|v\|^2}}{\sqrt{1-\|v\|^2}\left(\sqrt{1-\|v\|^2}+1\right)} \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{1-\|v\|^2}} \\ &= \gamma_v \end{aligned}$$

Lo que implica necesariamente que:

$$\begin{aligned} \gamma_u\gamma_v \langle\vec{v}| + \gamma_u \langle\vec{u}| (1 + \tfrac{\gamma_v^2}{1+\gamma_v}\|v\|^2) &= \gamma_u\gamma_v \langle\vec{v}| + \gamma_u\gamma_v \langle\vec{u}| \\ &= \gamma_u\gamma_v(\langle\vec{u}| + \langle\vec{v}|) \\ &= \gamma_u\gamma_v \tfrac{\|u\|\|v\|+1}{\|u\|\|v\|+1}(\langle\vec{u}| + \langle\vec{v}|) \\ &= \gamma_w \tfrac{\langle\vec{u}|+\langle\vec{v}|}{\|u\|\|v\|+1} \\ &= \gamma_w \langle\vec{w}| \end{aligned}$$

1.7. $L(w)_{21}$

Al igual que en la notación anterior, existe simetría entre $L(w)_{21}$ y $L(w)_{12}$, pues es preciso notar que tienen un cambio de variable u por v y debido a que ninguna de las velocidades presenta una caractgerística especial, es posible hacer el cambio entre ellas sin que modifiquen el término, por tanto corresponden exactamente al mismo.

1.8. $L(w)_{22}$

utilizamos algunos resultados que fuimos demostrando en el texto.

$$\begin{aligned} L(w)_{22} &= \gamma_u\gamma_v \langle\vec{u}|\vec{v}\rangle + \left(1_{3x3} + \tfrac{\gamma_u^2}{1+\gamma_u} |\vec{u}\rangle \langle\vec{u}|\right)\left(1_{3x3} + \tfrac{\gamma_v^2}{1+\gamma_v} |\vec{v}\rangle \langle\vec{v}|\right) \\ &= \gamma_u\gamma_v \langle\vec{u}|\vec{v}\rangle + \gamma_u\gamma_v \\ &= \gamma_u\gamma_v(\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle + 1) \\ &= \gamma_w \\ &= 1_{3x3} + \tfrac{\gamma_w^2}{1+\gamma_w} |\vec{w}\rangle \langle\vec{w}| \end{aligned}$$

Del paso 1 al paso 2, el razonamiento esta basado en que si se aplica un $\langle\vec{\varphi}|$ que sea paralelo a $\left\langle\vec{\phi}\right|$ de la forma $\left(1_{3x3} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\left|\vec{\phi}\right\rangle\left\langle\vec{\phi}\right|\right)$ se obtiene que se puede escribir como

$$\begin{aligned} \left(1_{3x3} + \tfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\left|\vec{\phi}\right\rangle\left\langle\vec{\phi}\right|\right)\langle\vec{\varphi}| &= 1_{3x3} + \tfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\left\langle\vec{\varphi}\middle|\vec{\phi}\right\rangle\left\langle\vec{\phi}\right| \\ &= 1_{3x3} + \tfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\left\langle\vec{\phi}\middle|\vec{\phi}\right\rangle\langle\vec{\varphi}| \\ &= \gamma_\phi \langle\vec{\varphi}| \end{aligned}$$

Se puede ver que el producto $L(u)L(v) = L(v)L(u)$ puesto que la matriz tendra la misma forma comoponente a componente solo que se invierte el orden de los factores individuales pero esto hecho no cambia la estructura del boost.
Atraves de la solucion de este punto se utiliso el hecho de que las velocidades son paralelas o antiparlales asi al momento de ejecutar el producto interno obtenemos el producto de la magnitudes sin tener en cuenta la projecion de las veloicdades$\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta)$, ahora si consideramos unas velocidades general con velocidad en las tres componentes, la demostracio hecha anteriormente no es completemente correcta por el producto $\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle\langle v| = \langle\vec{v}|\vec{v}\rangle\langle\vec{u}|$ no es cierto porque estos solo se cumple para velocidades paralelas entonces para ese caso la expersion de la compocion del boost es mas general que la que hemos encontrado.

2. Punto 2

$$x' = \Lambda x$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \left|\vec{x'}\right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{\gamma}{c}\langle\vec{v}| \\ \frac{\gamma}{c}|\vec{v}\rangle & 1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\frac{|\vec{v}\rangle\langle\vec{v}|}{c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ |\vec{x}\rangle \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma ct + \tfrac{\gamma}{c}\langle\vec{v}|\vec{c}\rangle \\ t' &= \gamma t + \tfrac{\gamma}{c^2}\langle\vec{v}|\vec{c}\rangle \\ \left|\vec{x'}\right\rangle &= \tfrac{\gamma}{c}|\vec{v}\rangle ct + |\vec{x}\rangle + \tfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\tfrac{|\vec{v}\rangle}{c^2}\langle\vec{v}|\vec{x}\rangle \\ \left|\vec{x'}\right\rangle &= \gamma|\vec{v}\rangle t + |\vec{x}\rangle + \tfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\tfrac{|\vec{v}\rangle}{c^2}\langle\vec{v}|\vec{x}\rangle \end{aligned}$$

Al aplicar límite cuando c tiende a infinito teniendo en cuenta que las velocidades son paralelas entre si asi oviando la projection($\langle \vec{v}| \, |\vec{u}\rangle = \|u\|\|v\|$) de las velocidades podemos ver que:

$$\begin{array}{ccc} \lim\limits_{c\to\infty} t' & = & \lim\limits_{c\to\infty} \left(\gamma t + \frac{\gamma}{c^2} \langle \vec{v}|\vec{c}\rangle\right) \\ t' & = & t \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \lim\limits_{c\to\infty} \left|\vec{x'}\right\rangle & = & \lim\limits_{c\to\infty} \left(\gamma \, |\vec{v}\rangle \, t + |\vec{x}\rangle + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \frac{|\vec{v}\rangle}{c^2} \langle \vec{v}|\vec{x}\rangle\right) \\ \left|\vec{x'}\right\rangle & = & |\vec{v}\rangle \, t + |\vec{x}\rangle \end{array}$$

Las cuales son las transformaciones galileanas. Por lo tanto $L(v)$ toma la estructura de las transformaciones galileanas.

$$\begin{array}{ccc} t' & = & t \\ \vec{x'} & = & \vec{v}t + \vec{x} \end{array}$$

3. Punto 3

en reposo $P_A = (m_a, 0, 0, 0)$

$$P_A \to P_b + P_C$$

Y teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{ccc} \vec{P_B} & = & -\vec{P_C} \\ m_A & = & E_B + E_C \\ E_s & = & \sqrt{m_s^2 + \|P_S\|^2} \end{array}$$

Desarrollamos:

$$\begin{array}{ccc} P_A & = & P_B + P_c \\ P_A^2 & = & (P_B + P_c)^2 \\ P_{A\mu} P_A^\mu & = & (P_B^\mu + P_c^\mu)(P_{B\mu} + P_{c\mu}) \\ m_A^2 & = & m_B^2 + m_C^2 + 2P_{B\mu} P_C^\mu \\ m_A^2 & = & m_B^2 + m_C^2 + 2(E_B E_C + \|P\|^2) \\ m_A^2 & = & m_B^2 + m_C^2 + 2(E_B(m_A - E_B) + E_B^2 - m_b^2) \\ m_A^2 & = & -m_B^2 + m_C^2 + 2E_B m_A \\ E_B & = & \frac{m_A^2 + m_B^2 - m_C^2}{2m_A} \end{array}$$

Realizando la misma deducción para E_C obtenemos que $E_C = \frac{m_A^2+m_C^2-m_B^2}{2m_A}$ reemplazando:

$$\begin{array}{rcl} E_B & = & \sqrt{m_b^2 + \|P\|^2} \\ \frac{m_A^2+m_B^2-m_C^2}{2m_A} & = & \sqrt{m_b^2 + \|P\|^2} \\ \left(\frac{m_A^2+m_B^2-m_C^2}{2m_A}\right)^2 & = & m_b^2 + \|P\|^2 \\ \frac{m_A^4+2m_A^2m_B^2-2m_A^2m_C^2+m_B^4-2m_B^2m_C^2+m_C^4}{4m_A^2} & = & m_b^2 + \|P\|^2 \\ \frac{m_A^4+2m_A^2m_B^2-2m_A^2m_C^2+m_B^4-2m_B^2m_C^2+m_C^4-4m_A^2m_B^2}{4m_A^2} & = & \|P\|^2 \end{array}$$

Usando el hecho de quedebemos de llegar a un factor correspondiente a $m_A^2 - (m_B + m_c)^2$ porque implicitamente nos lo sugiere el problema, utilizamos software y obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} \frac{(m_A^2-(m_B-m_C)^2)(m_A-(m_B+m_C)^2)}{4m_A^2} & = & \|P\|^2 \\ P & = & \frac{1}{2m_A}\sqrt{(m_A^2-(m_B-m_C)^2)(m_A^2-(m_B+m_C)^2)} \end{array}$$

Ello quiere decir que si $m_A < m_B + m_C$ se obtendrían momentos con soluciones imaginarias, lo que quiere decir que para las masas m_A y m_B se tiene una condición de entrada impuesta que la suma de ambas deben ser menor o igual a la masa de A. Lo anterior tiene sentido pues $m_A < m_B + m_C$ viola el principio de conservación de la energía.