Tarea 2 Estadistica

Sergio Gutierrez

August 2016

1. Punto 1

(a) Para poders conclocluir que $\Omega(E,V,N) = \Omega_S(V,N)\Omega_C(E,N)$ tenemos que tener en quenta que primero que como las particulas son indistinguibles e independientes entonces la energia interna es de un origen puramente cinético entonces $E = \sum^{3N} \frac{p^2}{2m}$:

$$\Omega(E,V,N) = \frac{1}{\hbar^{3N} N!} \int_{E=cte} dqdp = \frac{1}{\hbar^{3N} N1!} \int_{E=cte} dp \int dq$$

Podemos concluir que como la integral solo depende del los momentos y entonces la integral sobre la parte espacial tiene que ser el volumen en el que la particula puede moverese.Asi que podemos ver que la dependecia espacial es independiente a la parte de momentos asi que es calro que podemos escribir $\Omega(E,V,N) = \Omega_S(V,N)\Omega_C(E,N)$ donde:

$$\Omega_S(V,N) = \frac{1}{N!} \int dq \ , \ \Omega_C(E,N) = \frac{1}{\hbar^{3N}} \int_{E=cte} dp$$

Tambien pro definicion sabemos que $S = k_B \ln(\Omega(E,V,N))$ si replacamos $\Omega(E,V,N)$ vemos que tenemos:

$$\begin{aligned} S =& k_B \ln(\Omega(E,V,N)) = k_B \ln(\Omega_S(V,N)\Omega_C(E,N)) = k_B(\ln(\Omega_S(V,N)) + \ln(\Omega_C(E,N)) \\ =& k_B \ln(\Omega_S(V,N)) + k_B \ln(\Omega_C(E,N)) = S_C + S_S \end{aligned}$$

Asi que la entropia del todo sistema es la suma de las entormpias $S = S_C + S_S$

(b) Ahora si suponemos que el volumen V esta repartido en M celdas en las cuales son los suficiente emente pequeñas para que solo una particual pueda estar por celda y tomamos el caso $M \gg N$. con este caso podemos cuncluir como hay muchas mas celdas que particulas entonces la mayor pare del volume estaria vacio, si ademas consideramos que cada particual es practicamente puntual entonces con lo que se concluyo en el punto anteriro el volumen en el cual la particula se puede mover libre mente seria todo el volumen para cada una de las particulas asi que cocluimos que:

$$\Omega_S(V,N) = \frac{1}{N!} \int dq = \frac{V^N}{N!}$$

Ahora cosideremos la integral qes esta con $\Omega_C(E,N)$ teniendo en cuenta que la integral de la part $\Omega_S(V,N)$ entrego l resultado de la parte volumetrica asi que podemo encontrar una relacion con la parte superficial pero para poder encontrar un supreficie en un espacion 3N dimensinal no se encuentra de una manera trivial.
Considermeos la energia $E = \sum^{3N} \frac{p^2}{2m} \longrightarrow 2mE = \sum^{3N} p^2$ ahora tratemso de hacer una comparacion en un espacio bidimensional $x^2 + y^2 = R^2$ es la ecuacion de una esfera asi que en un espacio 3N dimensional podemos ver que $2mE = \sum^{3N} p^2$ es el analogo a un circulo asi que tratemos de encontrar cual seria la exprecion para una superficie 3N diemnsinal donde hay N particualas .

$$V = \frac{\pi^{\frac{3N}{2}} R^{3N}}{\Gamma(\frac{3N}{2}+1)} \longrightarrow \text{volumen de una esfera 3N dimensinal}$$

$$S = \frac{dV}{dR} = \frac{3N\pi^{\frac{3N}{2}} R^{3N-1}}{\Gamma(\frac{3N}{2}+1)} \longrightarrow \text{Como } N \approx N_A \longrightarrow S = \frac{3N\pi^{\frac{3N}{2}} R^{3N}}{\Gamma(\frac{3N}{2}+1)}$$

Asi que podemos concluir que:

$$\Omega(E,V,N) = \frac{3N\ V^N}{\hbar^{3N} N!} \frac{\pi^{\frac{3N}{2}} R^{3N}}{\Gamma(\frac{3N}{2}+1)}$$

Ahora si queremos encontar la dependencia de la entropia sabemos que $S = k_B \ln(\Omega(E,V,N))$ asi que calculemos $\ln(\Omega(E,V,N))$, primero aplicamos la aproximacion de Stirling:
$\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x}\ x^x e^{-x},\ \ln(N!) \approx N\ln(N) - N$

$$\ln\left(\Gamma\left(\frac{3N}{2}+1\right)\right) = \ln\left(\sqrt{3N\pi}\ \left(\frac{3N}{2}\right)^{\frac{3N}{2}} e^{-\frac{3N}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln(3N\pi) + \frac{3N}{2}\ln\left(\frac{3N}{2}\right) - \frac{3N}{2}$$

$$\ln(\Omega(E,V,N)) = \ln\left(\frac{3N\ V^N}{\hbar^{3N} N!} \frac{\pi^{\frac{3N}{2}} R^{3N}}{\Gamma(\frac{3N}{2}+1)}\right) = \ln\left(3N\ \pi^{\frac{3N}{2}} R^{3N} V^N\right) - \ln\left(\hbar^{3N} N!\right) - \ln\left(\Gamma(\frac{3N}{2}+1)\right)$$

$$= \ln(3N) + \frac{3N}{2}\ln(\pi) + 3N\ln(R) + N\ln(V) - 3N\ln(\hbar) - N\ln(N) + N - \frac{1}{2}\ln(3N\pi) - \frac{3N}{2}\ln\left(\frac{3N}{2}\right) + \frac{3N}{2}$$

$$= \frac{3N}{2}\ln(\pi) + 3N\ln(R) + N\ln(V) - 3N\ln(\hbar) - N\ln(N) - \frac{1}{2}\ln(3N\pi) - \frac{3N}{2}\ln\left(\frac{3N}{2}\right) + \frac{3N}{2}$$

Hacemos un simplificacion de factores que no me aportan mucha informacion sobre el total de micro estados. Ahora si agrupamos factores y tenemso en cuenta que $R^2 = 2mE$:

$$= N\ln\left(\pi^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{3N}{2}\left(\ln(2mE) - \ln\left(\frac{3N}{2}\right)\right) + N(\ln(V) - \ln(N)) - 3N\ln(\hbar) - \frac{1}{2}\ln(3N\pi) + \frac{3N}{2}$$

$$= N\ln\left(\frac{V}{N}\right) + \frac{3N}{2}\ln\left(\frac{2E}{3N}\right) + N\ln\left(\frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}}}{\hbar^3}\right)$$

$$S = k_B \ln(\Omega(E,V,N)) = k_B N\left(\ln\left(\frac{V}{N}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2E}{3N}\right) + \ln\left(\frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}}}{\hbar^3}\right)\right)$$

(c) Podemos encontrar al presion y la ecuacion de estado de las relaciones analiticas:

$$P = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,N} \ , \ \frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N}$$

Si lo aplicamos a la entropia que encontramos en el punto anterior

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,N} = \frac{k_B N}{V} \longrightarrow P = T\frac{k_B N}{V} \longrightarrow PV = Tk_B N$$
$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N} = \frac{3N}{2}\frac{\partial \ln(2E)}{\partial E} = \frac{3N}{2E} \longrightarrow T = \frac{2E}{3Nk_B}$$

(d) Para la expancion libre vemos que el volumen cambia de un $V_i \longrightarrow V_f$ asi mismo podemos concluir que en el estado final hay un mayor numero de micro estados.

$$\Omega(E,V,N)_i = \frac{3N\ V_i^N}{\hbar^{3N} N!}\frac{\pi^{\frac{3N}{2}} R^{3N}}{\Gamma(\frac{3N}{2}+1)} \ , \ \Omega(E,V,N)_f = \frac{3N\ V_f^N}{\hbar^{3N} N!}\frac{\pi^{\frac{3N}{2}} R^{3N}}{\Gamma(\frac{3N}{2}+1)}$$

Asi que para podemos calcular el cambio de entropia de este sistema de la misma forma que antes.

$$\begin{aligned}
\triangle S =& S_f - S_i \\
=& k_B N\left(\ln\left(\frac{V_f}{N}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2E}{3N}\right) + \ln\left(\frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}}}{\hbar^3}\right) - \ln\left(\frac{V_i}{N}\right) - \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2E}{3N}\right) - \ln\left(\frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}}}{\hbar^3}\right)\right) \\
\triangle S =& k_B N \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)
\end{aligned}$$

2. Punto 2

(a) Tenemos dos gases distinguibles entre si pero indsitinguibles para el mismo gas somo nos encontramos en la situacion I podemos sabemos que los dos gases se encuentran en volumeenso aislados uno del otro, pero tambien sabemos que el numero de micros estados posibles en el que pueda estar el sistema completo son la cantidad de micro estods en los que pueda estar el gas 1 y el gas dos tal que aplicando de la teoria de la probabilidades conjuntas sabemos que $\Omega(E, V_1, V_2, N_1, N_2) = \Omega(E_1, V_1, N_1)\Omega(E_2, V_2, N_2)$ pero sabemos que las expreciones de energia cinetica no van a ser completamente independientes E_1 de E_2 puesto que el sistema tinde al valor de la energia que maximise el numero de micro estados puesto que este tiende ir al equilibrio termodinamicos asi que podemos concluir con lo anteriormente dicho y con lo desarrollado en el punto 1:

$$\begin{aligned}
\Omega(E, V_1, V_2, N_1, N_2) =& \Omega(E_1, V_1, N_1)\Omega(E_2, V_2, N_2) \\
=& \Omega_{S1}(V_1, N_1)\ \Omega_{S2}(V_2, N_2)\ \Omega_C(E_1^*, E_2 + E - E_1^*, N_1, N_2) \\
=& \frac{V_1^{N_1}}{N_1!}\frac{V_2^{N_2}}{N_2!}\Omega_C(E_1^*, E_2 + E - E_1^*, N_1, N_2)
\end{aligned}$$

(b) Ahora para poder tener completamente definido$\Omega(E, V_1, V_2, N_1, N_2)$ tenemos que calcular la integral de $\Omega_C(E_1^*, E_2 + E - E_1^*, N_1, N_2)$ ahora la dependencia que existe entre los gases es tal que la cantidad de micro estados sea maxima($E_1^* = E_2$) es la energia que hace que se cumpla esto), asi el sistema estara en equilibrio termodinamico,

$$\Omega_C(E_1^*, E_2 + E - E_1^*, N_1, N_2) = \frac{1}{\hbar^{3(N_1+N_2)}} \int_{E_1^*} dq_1 \int_{E_2} dq_2$$

Ahora vemos que este es el mismo porblema que se soluciono en el primer punto de esta tarea entonces vamo a usar los resultados anteriores puesto que:

$$\begin{aligned} S =& k_B \ln(\Omega(E, V_1, V_2, N_1, N_2)) \\ =& k_B \left(\ln(\Omega(E_1, V_1, N_1)\Omega(E_2, V_2, N_2)\right) = k_B \left(\ln(\Omega(E_1, V_1, N_1)\right) + k_B \ln(\Omega(E_2, V_2, N_2))) \end{aligned}$$

$S = S_1 + S_2$

Como podemos calcular la entropia para un lado y sumar la del otro ya tenmos las expreciones de la entropia asi que es solo replazar en lo encontrado anterior mente.

$$= k_B N_1 \left(\ln\left(\frac{V_1}{N_1}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2E_1}{3N_1}\right) + \ln\left(\frac{(2\pi m_1)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}}}{\hbar^3}\right)\right) + k_B N_2 \left(\ln\left(\frac{V_2}{N_2}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2E_2}{3N_2}\right) + \ln\left(\frac{(2\pi m_2)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}}}{\hbar^3}\right)\right)$$

(c) Ahora para la situacion final es claro por los mismos argumento del primer punto que el volumen que va a poder recorrer cada particula va a ser todo el volumen porque los dos ases estan compuestos por particulas puntuales asi que $V_1 = V_2 = V$:

$$\Omega(E, V, N_1, N_2) = \frac{V^{N_1+N_2}}{N_1! N_2!} \Omega_C(E_1^*, E_2 + E - E_1^*, N_1, N_2)$$

Si queremos calcular la presion sabemos como antes que $P = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,N}$ y demostramos en el punto anterior que $S = S_1 + S_2$ entonces:

$$P = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,N} = T\left(\frac{\partial (S_1 + S_2)}{\partial V}\right)_{E,N} = T\left(\frac{\partial S_1}{\partial V}\right)_{E,N} + T\left(\frac{\partial S_2}{\partial V}\right)_{E,N} = P_1 + P_2$$

podemos concluir que la presion es la suma de las presiones parciales.

(d) Para calcular el cambio de la entropia vamos a eliminara de ante mano los terminos constantes que se cancelan entre si para salvar espacio,

$$\begin{aligned} \triangle S =& k_B N_1 \ln\left(\frac{V}{N_1}\right) + k_B N_2 \ln\left(\frac{V}{N_2}\right) - k_B N_1 \ln\left(\frac{V_1}{N_1}\right) - k_B N_2 \ln\left(\frac{V_2}{N_2}\right) \\ =& k_B N_1 \ln\left(\frac{V}{V_1}\right) + k_B N_2 \ln\left(\frac{V}{V_2}\right) \end{aligned}$$

Pero sabemos que $\mathfrak{v}m = V$ donde v es el volumen de la particula y m es la cantidad de celdas en la que se subdivide el volumen.

(e) Como las particulas son indistinguibles entonces no tiene sentido en hablar de volumenos diferentes y cantidad de particulas entonces si aplicamos estas correciones es claro que todos los factores se cancelan entre si al hacer la diferencia entonces no hay paradoja.

3. Punto 3

(a) Consideremos que tenemos un sistema de N particulas en presencia de un campo magnetico B. Si el spin de una particula esta en el sentido del campo tiene una energia $-\frac{\epsilon}{2}$ si esta encontra tiene una energia de $\frac{\epsilon}{2}$, representaremos el numero de particulas con su espin en sentido del campo magnetico $n_\uparrow$ y en sentido opuesto $n_\downarrow$.

$$N = n_\uparrow + n_\downarrow \ , \ E = -n_\uparrow \frac{\epsilon}{2} + n_\downarrow \frac{\epsilon}{2} \longrightarrow E = -n_\uparrow \frac{\epsilon}{2} + (N - n_\uparrow)\frac{\epsilon}{2} = -n_\uparrow \epsilon + N\frac{\epsilon}{2}$$

(b) calcular el numero de micro estados para este caso se puede hacer de manera directa si consideramos que tenemos N particulas, estas van a tender al estado minimo de energia el cual es en el sentido de campo magnetico entonces solo tenemos que contar la combinaciones de $n_\uparrow$ en las N particulas.

$$\Omega(E, V, N_1, N_2) = \left(\begin{array}{c} N \\ n_\uparrow \end{array} \right) = \frac{N!}{(N - n_\uparrow)! n_\uparrow!}$$

Para Calcular la entropia tenemos la $S = k_B \ln(\Omega(E, V, N))$ peero al hacer esto vamos a tener que usar la aproximaciones: $\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x}\ x^x e^{-x},\ \ln(N!) \approx N\ln(N) - N$.

$$\begin{aligned} S =& k_B \ln\left(\frac{N!}{(N - n_\uparrow)! n_\uparrow!}\right) = k_B \left(\ln(N!) - \ln((N - n_\uparrow)! n_\uparrow)\right) \\ =& k_B \left(N\ln(N) - N - (N - n_\uparrow)\ln(N - n_\uparrow) + (N - n_\uparrow) - n_\uparrow \ln(n_\uparrow) + n_\uparrow\right) \\ =& k_B \left(N\ln(N) - (N - n_\uparrow)\ln(n_\downarrow) - n_\uparrow \ln(n_\uparrow)\right) \\ =& k_B \left(N\ln\left(\frac{N}{n_\uparrow}\right) - n_\uparrow \ln\left(\frac{n_\downarrow}{n_\uparrow}\right)\right) \end{aligned}$$

(c) Para calcular la temperatura usamos la relacion $\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N}$:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N} \ , \ \frac{\partial S(n_\uparrow(E))}{\partial E} = \frac{\partial S}{\partial n_\uparrow}\frac{\partial n_\uparrow(E)}{\partial E} \ , \ S = k_B \left(N\ln\left(\frac{N}{n_\uparrow}\right) - n_\uparrow \ln\left(\frac{n_\downarrow}{n_\uparrow}\right)\right)$$

$$S = -k_B \left(\frac{N}{2}\ln\left(\frac{n}{N^2}\right) + \frac{E}{2}\ln\left(\frac{n_\uparrow}{n_\downarrow}\right)\right)$$

$$\frac{\partial S(E)}{\partial E} = \frac{k_B}{\epsilon}\ln\left(\frac{n_\uparrow}{n_\downarrow}\right) \longrightarrow T = \frac{\epsilon}{k_B \ln\left(\frac{n_\uparrow}{n_\downarrow}\right)}$$

(d) Si dejamos cada termino en funcion de los parametros N y ϵ utilizando la expresion de la temperatura tenemos:

$$n_\downarrow = N - \frac{N}{e^{-\mathfrak{B}\epsilon} + 1} \ , \ n_\uparrow = \frac{N}{e^{-\mathfrak{B}\epsilon} + 1} \ , \ \frac{E}{\epsilon} = n_\uparrow + \frac{N}{2} = \frac{N}{e^{-\mathfrak{B}\epsilon} + 1} + \frac{N}{2} \longrightarrow E = \epsilon\left(\frac{N}{e^{-\mathfrak{B}\epsilon} + 1} + \frac{N}{2}\right)$$