# Tarea 3 de partículas

Sergio Gutierrez Javier Zúñiga -

13 de septiembre de 2016

## Punto 7

La ecuación de Schrodinger está dada por:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$$

Usando unidades natutrales:

$$\left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi(x,t) = i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$$

A partir de este, construiremos nuestro Lagrangeano correspondiente, asumiendo que $V$ es una constante por simplicidad.

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi\right)} = 0$$

Vamos a tomar entonces:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = V\psi \rightarrow \mathcal{L}(\psi) = \frac{1}{2}V\psi^2$$

Mientras que para el otro termino:

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = \frac{1}{2m}\nabla^2\psi(x,t) + i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$$

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = \frac{1}{2m}\partial_i\partial_i\psi + i\partial_0\psi \rightarrow \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = \partial_\mu\cdot(\frac{1}{2m}\partial_i\psi, i\psi)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = \frac{1}{2m}\partial_i\psi + i\psi \rightarrow \mathcal{L}(\partial_\mu\psi) = \partial_\mu\psi\cdot(\frac{1}{2m}\partial_i\psi, i\psi) \rightarrow \mathcal{L}(\partial_\mu\psi) = (\partial_0\psi, \partial_I\psi)\cdot(i\psi, \frac{1}{2m}\partial_i\psi)$$

$$\mathcal{L}(\partial_\mu\psi) = \frac{1}{2m}\partial_i\psi\partial^i\psi + i\psi\dot{\psi}$$

Al reescribir el lagrangiano en términos de la función $\psi$ y su conjugada $\psi^*$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2m}\partial_i\psi^*\partial_i\psi - i\psi\dot{\psi}^* + i\psi^*\dot{\psi} + \frac{1}{2}V\psi^*\psi$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2m}\partial_i\psi^*\partial_i\psi + i(\psi^*\dot{\psi} - \psi\dot{\psi}^*) + \frac{1}{2}V\psi^*\psi$$

Ahora comodaremos las constantes utilizando las ecuaciones de Euler - Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -i\dot{\psi^*} + V\psi^*;\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = -\frac{1}{2m}\partial_i\psi^* - i\psi^*;\ \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = -\frac{1}{2m}\partial_i\partial_i\psi^* - i\partial_0\dot{\psi^*}$$

Claramente al acomodar dicho lagrangiano de tal forma que se llegue a la ecuación de Schrodinger multiplicamos por un medio el término dependiente del tiempo. La ecuación finalmente queda de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2m}\partial_i\psi^*\partial_i\psi + \frac{i}{2}(\psi^*\dot{\psi} - \psi\dot{\psi^*}) - \frac{1}{2}V\psi^*\psi \tag{1}$$

Ahora, utilizaremos la transformación de simetría más conveniente que para este caso corresponde a la de una rotación teniendo en cuenta que la partícula no tiene una orientación predilecta.

$$\psi \mapsto \psi' = e^{i\epsilon}\psi$$
$$\psi^* \mapsto \psi'^* = e^{-i\epsilon}\psi$$

Utilizando aproximaciones de ángulos pequeños podemos darnos cuenta de que:

$$\psi' \approx (1+i\epsilon)\psi\ \ \psi'^* \approx (1-i\epsilon)\psi^*\ \ \delta\psi = i\epsilon$$
$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}\delta\psi + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\right)\partial_\mu\delta\psi = 0;\ \delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}\delta\psi - \delta\psi\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\right) + \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\delta\psi\right) = 0$$
$$\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\delta\psi\right) = 0$$

Definimos $j^\mu = \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu \psi)}\right)\delta\psi \Rightarrow \partial_\mu j^\mu = 0$

$$j^\mu = \left(-\frac{1}{2m}(\psi'^*\partial_i\psi' - \psi'\partial_i\psi^*) + \frac{i}{2}(\psi'^*\dot{\psi'} - \psi'\dot{\psi'^*})\right)i\epsilon$$
$$j^0 = \frac{i}{2}\partial_0(\psi\psi^*) = \partial_0|\psi|^2 = \partial_0\rho \qquad j^i = -\frac{1}{2m}(\psi'^*\partial_i\psi' - \psi'\partial_i\psi^*)$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0$$

# Punto 8

Considerando la ecuación de Klein - Gordon:

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\varphi(x) = 0$$

Dicha ecuación satisface la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi\right)} = 0$$

Para este caso simplificaremos nuestro cálculo del Lagrangiano asumiendo que de la siguiente manera:
Sea

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = m^2\varphi \rightarrow \mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2$$
$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi\right)} = (\partial_\mu \partial^\mu \varphi) \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = \partial^\mu \varphi \rightarrow \mathcal{L}(\partial_\mu \varphi) = (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi)$$

Como en el punto anterior, multiplicamos por una constante para conservar la ecuación de Euler - Lagrange en el término necesario que en este caso corresponde al primero:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \tag{2}$$

Nótese que corresponde específicamente a un lagrangiano de un campo $\varphi(x,t)$ real, por ende al llevarlo a complejo es posible decir que la ecuación (2) podemos reescribirla de la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi^*) - \frac{1}{2}m^2\varphi^*\varphi \tag{3}$$

Ahora, utilizaremos la transformación de simetría más conveniente que para este caso corresponde a la de una rotación teniendo en cuenta que la partícula no tiene una orientación predilecta.

$$\varphi \mapsto \varphi' = e^{i\epsilon}\varphi$$
$$\varphi^* \mapsto \varphi'^* = e^{-i\epsilon}\varphi$$

Que por definición:

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi'^*)(\partial^\mu \varphi') + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi')(\partial^\mu \varphi'^*) - \frac{1}{2}m^2\varphi'^*\varphi' \tag{4}$$

y al aplicar las ecuaciones de Euler - Lagrange:

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\varphi(x)' = 0$$

Lo que necesariamente significa que es una transformación de simetría, por ende podemos aplicar el teorema de Noether:
Utilizando las aproximaciones de ángulos pequeños

$$\varphi \mapsto \varphi' \approx (1 + i\epsilon)\varphi \Rightarrow \delta\varphi = i\epsilon\varphi$$
$$\varphi* \mapsto \varphi'^* \approx (1 - i\epsilon)\varphi \Rightarrow \delta\varphi^* = -i\epsilon\varphi$$

Bajo los mismos argumentos del punto anterior:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\delta\psi\right) = 0$$

Definimos $j^\mu = \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu \psi)}\right)\delta\psi \Rightarrow \partial_\mu j^\mu = 0$

$$-i\epsilon\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\varphi\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}-\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)=0$$
$$i\epsilon\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\varphi\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right)+\varphi^*\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\varphi^*\right)=0$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\varphi\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right)+\nabla\cdot(\varphi^*\nabla\varphi-\varphi\nabla\varphi^*)=0$$

Definamos entonces $\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\varphi\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}\right)=\rho$ y $(\varphi^*\nabla\varphi-\varphi\nabla\varphi^*)=\vec{J}$, entonces la ecuación de continuidad se asigna de la forma:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{J}=\partial_\mu j^\mu=0$$

Nótese que el término de $\rho$ contiene derivadas con respecto al tiempo, lo que quiere decir que dependiendo de la definición de nuestro campo y su derivada, pueden resultar valores negativos que de por sí nos obliga a abandonar la idea de que es una probabilidad de onda, además de que al explorar los términos, sale una ecuación de segundo grado dependiente del tiempo.

# Punto 9

Considerando la ecuación de Klein - gordon con su respectivo Lagrangiano:

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu+m^2\right)\varphi(x)=0$$
$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi)-\frac{1}{2}m^2\varphi^2$$

## (A)

Asumiremos que cualquier soluciona la ecuación Klein - gordon tiene la forma:

$$\varphi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^4p e^{ip\cdot x}\delta(p^2-m^2)a(p)$$

Verifiquemos que si es solución de la ecuación de Klein - gordon:

$$\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^4p\ \partial_\mu\partial^\mu e^{ip\cdot x}\delta(p^2-m^2)a(p)$$

si aplicamos índices repetidos explícitamente a las derivadas respecto a x :

$$\partial_\mu\partial^\mu=\partial_0^2-\partial_1^2-\partial_2^2-\partial_3^2$$
$$\partial_0^2e^{ip\cdot x}-\partial_1^2e^{ip\cdot x}-\partial_2^2e^{ip\cdot x}-\partial_3^2e^{ip\cdot x}\to(-p_0^2+p_1^2+p_2^2+p_3^2)e^{ip\cdot x}\to-(p_0^2-\|\vec{p}\|^2)e^{ip\cdot x}$$

ahora si consideramos que $E^2=m^2+\|\vec{p}\|^2$ y además que $p_0=E$

$$\partial_\mu\partial^\mu e^{ip\cdot x}=-(p_0^2-\|\vec{p}\|^2)e^{ip\cdot x}=-(E^2-\|\vec{p}\|)e^{ip\cdot x}=-m^2e^{ip\cdot x}$$

Así que podemos ver si reagrupamos los términos de la integral.

$$\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^4p\ \partial_\mu\partial^\mu e^{ip\cdot x}\delta(p^2-m^2)a(p) = -\frac{m^2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^4p\ e^{ip\cdot x}\delta(p^2-m^2)a(p)$$

$\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x) = -m^2\varphi(x)$ Asi que k-g queda como: $\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\varphi(x) = 0 \to \left(-m^2+m^2\right)\varphi(x) = 0$

Así que cualquier función con esta forma si es solución. Ahora miremos $\varphi(x)$ y definimos $E_p := +\sqrt{\vec{p}^2 - m^2}$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^4p e^{ip\cdot x}\delta(p^2-m^2)a(p) \to \delta(p^2-m^2) = \delta(p_0^2-E_p^2) = \frac{\delta(p_0+E_p)}{2E_p} - \frac{\delta(p_0-E_p)}{2E_p}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2E_p(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^4p e^{ip\cdot x}(\delta(p_0+E_p)-\delta(p_0-E_p))a(p)$$

$$= \frac{1}{2E_p(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\left(\int d^4p\delta(p_0+E_p)e^{ip\cdot x} - \int d^4p e^{ip\cdot x}\delta(p_0-E_p)a(p)\right)$$

$$= \frac{1}{2E_p(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\left(\int d^3p\ e^{i(E_p,\vec{p})\cdot x}a(E_p,\vec{p}) - \int d^3p e^{i(-E_p,\vec{p})\cdot x}a(-E_p,\vec{p})\right)$$

Ahora para la segunda integral hacemos un cambio de variable $\vec{p} = -\vec{p}'$ entonces si calculo el diferencial $dp_i = -dp_i'$ asi que aplicando esta cambio a las tres cordenadas tenemos:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2E_p(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3p\ e^{i(E_p,\vec{p})\cdot x}a(E_p,\vec{p}) + \frac{1}{2E_p(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3p e^{i(-E_p,-\vec{p})\cdot x}a(-E_p,-\vec{p})$$

$$\varphi(x) = \varphi(x)^+ + \varphi(x)^- \to \varphi(x)^\pm = \frac{1}{2E_p(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3p e^{i(\pm E_p,\pm\vec{p})\cdot x}a(\pm E_p,\pm\vec{p})$$

$$\varphi(x)^\pm = \frac{1}{\sqrt{2E_p}(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3p e^{i(\pm E_p,\pm\vec{p})\cdot x}a^\pm(\vec{p}) \to a^\pm(\vec{p}) = \frac{a(\pm E_p,\pm\vec{p})}{\sqrt{2E_P}}$$

## (B)

Usando el resultado anterior podemos escribir:

$$\varphi(x^0,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3}{\sqrt{2E_p}}\left(e^{ipx}a^+(p) + e^{-ipx}a^-(p)\right)$$

Derivando respecto al tiempo obtenemos:

$$\dot{\varphi}(x^0,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3p}{\sqrt{2E_p}}\left(iE_pe^{ipx}a^+(p) - iE_pe^{-ipx}a^-(p)\right)$$

Ahora podemos reemplazar estos dos últimos en :

$$\int d^3x e^{-ipx}\left\{E_p\varphi(x) - i\dot{\varphi}(x)\right\}$$

y así tenemos:

$$\int\frac{d^3x}{\sqrt{2E_p}}\frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^{3/2}}\left\{E_p\int d^3\bar{p}e^{ipx}a^+(p) + E_p\int d^3\acute{p}e^{ipx}a^-(q) - i(iE_p)\int d^3\bar{p}e^{ipx}a^+(p) + i(iE_p)\int d^3\bar{p}e^{ipx}a^-(p)\right\}$$

Sabiendo y considerando que:

$$\delta(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\bar{p}\bar{x}} d^3\acute{x}$$

Podemos reercribir:

$$= \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_p}} \left\{ E_p\delta(p)e^{i\bar{p}\bar{x}}a^+(p) + E_p\delta(p)e^{i\bar{p}\bar{x}}a^-(p) + E_p\delta(p)e^{i\bar{p}\bar{x}}a^+(p) - E_p\delta(p)e^{-i\bar{p}\bar{x}}a^-(p) \right\}$$

Vemos que el segundo y cuarto término son iguales, entonces escribimos:

$$= \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_p}} \left\{ E_p\delta(p)e^{i\bar{p}\bar{x}}a^+(p) + E_p\delta(p)e^{i\bar{p}\bar{x}}a^+(p) \right\}$$

y finalmente:

$$= \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{2E_p}} \left\{ 2E_p a^+(p) \right\}$$

Vemos claramente entonces que el factor $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_p}}$ es la constante de proporcionalidad que nos piden hallar. Así:

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_p}} intd^3x e^{-ipx} \left\{ E_p\varphi(x) - \dot{\varphi}(x) \right\}$$

Análogamente para $a^-(p)$ y $\int d^3x e^{ipx} \left\{ E_p\varphi(x) + i\dot{\varphi}(x) \right\}$ podemos demostrar que:

$$a^-(p) = \int \frac{d^3x}{\sqrt{2E_p}} \frac{e^{ipx}}{(2\pi)^{3/2}} \left\{ E_p\varphi(x) + i\dot{\varphi}(x) = a^+(p) \right\}$$

Tenemos:

$$\int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_p}} \left\{ E_p\delta(p)e^{i\bar{p}\bar{x}}a^+(p) + E_p\delta(p)e^{i\bar{p}\bar{x}}a^-(p) - E_p\delta(p)e^{i\bar{p}\bar{x}}a^+(p) + E_p\delta(p)e^{-i\bar{p}\bar{x}}a^-(p) \right\}$$

y finalmente:

$$= \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{2E_p}} \left\{ 2E_p a^-(p) \right\}$$

Como $\varphi$ es solución de la ecuación de Klein-Gordon entonces debe ser independiente del tiempo. Para esto derivamos explícitamente de los resultados anteriores $a^+$ y $a^-$:

$$\partial_0 a^+(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_p}} \int d^3x e^{-ipx} \left\{ E_p\varphi\dot{(x)} - i\ddot{\varphi}(x) \right\}$$

ya conocemos $\dot{\varphi}$; solo nos hace falta calcular $\ddot{\varphi}$:

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{(2\pi)^{2/3}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_p}} \left\{ -E_p^2 e^{ipx}a^+(p) - E_p^2 e^{-ipx}a^-(p) \right\}$$

Reemplazamos:

$$\partial_0 a^+ = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_p}} \int d^3x e^{-ipx} \left\{ iE_p^2 e^{ipx}a^+ - iE^2 e^{-ipx} - iE_p^2 e^{ipx} + iE_p^2 e^{-ipx} \right\}$$

Vemos claramente que este término es 0. Análogamente para $a^-$ tenemos:

$$\partial_0 a^- = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_p}} \int d^3x e^{ipx} \left\{ -iE_p^2 e^{ipx} a^+ + iE^2 e^{-ipx} + iE_p^2 e^{ipx} - iE_p^2 e^{-ipx} \right\}$$

Y así queda demostrado que $a^{\pm}$ no tiene dependencia del tiempo.