Tarea 3 Estadistica

Sergio Gutierrez

9 de September 2016

1. Punto 1

Consideremos un ensamble estadistico micro-canonico el cual esta aislado y consiste de N particulas identicas, indistinguibles y que no interactuan entre si con una energia por particula dada por:

$$\varepsilon(p,q) = \varepsilon_0(p^2 = q^4) \quad p,q \in \mathbb{Z}^+ \tag{1}$$

Buscamos calcular el numero total de micro-estados $\Omega(E,N)$ accesible al sistema con energía E. Si subdividimos este sistema en dos, un que solo contiene una partícula con energía E' y el sistema restante con N-1 partículas y energía $E - E'$. Ahora si queremos contar el numero total de micro estados del sistema de energía E esto es análogo a contar la cantidad de micro estados de cada subsistema.Recordemos la regla de la multiplicación nos dice que si hacemos un experimento aleatorio y en la primera parte tenemos n resultados posibles y para cada uno de estos hay m resultados posibles de la etapa 2 entonces la cantidad total de posibles resultados es n*m; con esto en mente pensemos entonces en $\Omega(E,N)$ los dos subsistemas no interactúan por definición entonces los podemos considerara como independientes talque solo tenemos que tener en cuenta la cantidad de micro-estados que puede tener una partícula con energía E' y los micro estados del resto del sistema, como estos son independientes podemos asumir que para cada uno de los $\Omega(N-1, E-E')$ hay $\Omega(1,E')$ micro-estados en los que puede estar la partícula. Haciendo alusión a la regla de multiplicación $\Omega(N-1,E-E')\Omega(1,E')$ es la cantida de micro estados posibles para un sistema con energía E' puesto que para que sea $\Omega(N,E)$ tenemos que tener en cuenta todas los posibles valores de E' asi que podemos concluir que :

$$\Omega(N,E) = \sum_{E'=0}^{E} \Omega(N-1, E-E')\Omega(1,E') \tag{2}$$

Ahora notamos que reescribir esta suma si dejamos quieto $\Omega(N-1, E-E')$ y hacemos la suma sobre un incremento de E' dividiendo sobre el valor constante $\Omega(N-1, E-E')$ tal que:

$$\Omega(N,E) = \Omega(N-1,E) \sum_{E'=0}^{E} \frac{\Omega(N-1,E-E')}{\Omega(N-1,E)} \Omega(1,E')$$

$$= \Omega(N-1,E) \left[\Omega(1,0) + \frac{\Omega(N-1,E-1)}{\Omega(N-1,E)} \Omega(1,1) + \frac{\Omega(N-1,E-2)}{\Omega(N-1,E)} \Omega(1,2) + .. \right]$$

Asi calculando la expansión de la siguiente manera:

$$\Omega(N,E) = \Omega(N-1,E)\ [\Omega(1,0) + ...+ \frac{\Omega(N-1,E-n)}{\Omega(N-1,E)} \Omega(1,n) + ... + \frac{\Omega(N-1,0)}{\Omega(N-1,E)} \Omega(1,E)] \quad (3)$$

Ahora si queremos calcular la entropía de sistema $S(N,E) = k_B \ln(\Omega(N,E))$ podemos aplicarlo a la expansión 3 :

$$S(N,E) = k_B \ln(\Omega(N,E))$$

$$= k_B \ln(\Omega(N-1,E) \sum_{E'=0}^{E} \frac{\Omega(N-1,E-E')}{\Omega(N-1,E)}) \Omega(1,E'))$$

$$= k_B \ln(\Omega(N-1,E)) + k_B \ln(\sum_{E'=0}^{E} \frac{\Omega(N-1,E-E')}{\Omega(N-1,E)}) \Omega(1,E'))$$

Consideremos como son las entropía de cada factor $\Omega(N-1, E-E')$:

$$S(N-1,E-E') = k_B \ln(\Omega(N-1,E-E')) \longrightarrow \Omega(N-1,E-E') = e^{\frac{1}{k_B} S(N-1,E-E')}$$

Así que podemos concluir que podemos reescribir el factor $\ln(\sum)$ como :

$$\ln(\sum_{E'=0}^{E} \frac{\Omega(N-1,E-E')}{\Omega(N-1,E)} \Omega(1,E')) = \ln(\sum_{E'=0}^{E} e^{\frac{1}{k_B}(S(N-1,E-E')S(N-1,E))}) \Omega(1,E'))$$

Así podemos reescribir la entropía del sistema como:

$$S(N,E) = S(N-1,E) + k_B \left(\ln(\sum_{E'=0}^{E} e^{\frac{1}{k_B}(S(N-1,E-E')-S(N-1,E))}) \Omega(1,E') \right)$$

$$\text{definimos la variable } \Delta = \frac{1}{k_B}(S(N-1,E-E')S(N-1,E))$$

Podemos ver que si tomamos valores de E' muy pequeños el comportamiento de Δ es negativos y decreciente lineal mente así que podemos hacer la aproximación para valores pequeños de E'como $\Delta = -\beta E'$ porque este sigue el mismo comportamiento en este limite puesto que la diferencia entre las entropía va a ser aproximadamente el valor de E' puesto que este es muy pequeño así que ponemos una constante β para modular el valor que queremos.

Hagamos una aproximación para energías mas altas pero de una cantidad relativamente baja de partículas:

$$S(N,E) = S(N-1,E) + k_B \ln(\sum_{E'=0}^{\infty} e^{-\beta E'})\Omega(1,E') \tag{4}$$

Así que podemos concluir que la función de la entropía usualmente el argumento de ln es una función que es proporcional a la temperatura y teniendo en cuanta que típicamente la función de partición tiene como argumente una exponencial podemos concluir que la función de partición para una partícula es

$$Z(t) = \sum_{E'=0}^{\infty} e^{-\beta E'}\Omega(1,E')$$

Ahora si consideramos el potencial químico:

$$-\frac{\mu}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{E,V}$$

si consideramos que el sistema solo incrementa por una partícula a la ves entonces $\partial N = 1$ asi que podemos encontrar cuanto cambia la entropía por partícula pero la expresión 4 nos deja encontra cuanto vale este cambio.

$$S(N,E) - S(N-1,E) = k_B \ln(\sum_{E'=0}^{\infty} e^{-\beta E'})\Omega(1,E')$$

Entonces podemos concluir que el minimo cambio de entropia esta dado por:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{E,V} = S(N,E) - S(N-1,E) \quad -\frac{\mu}{T} = S(N,E) - S(N-1,E) \tag{5}$$

Ahora la entropía del sistema podemos interpretarla como N veces la entropía de una sola partícula en el limite termodinámico o que cada partícula tenga una parte igual de la energía, como el cambio de entropía mínimo es el de una sola entonces un sistema compuesto por N partículas tendrá una entropía $s(E,N) = Ns(\frac{E}{N})$ cahora si calculamos el potencial quimico

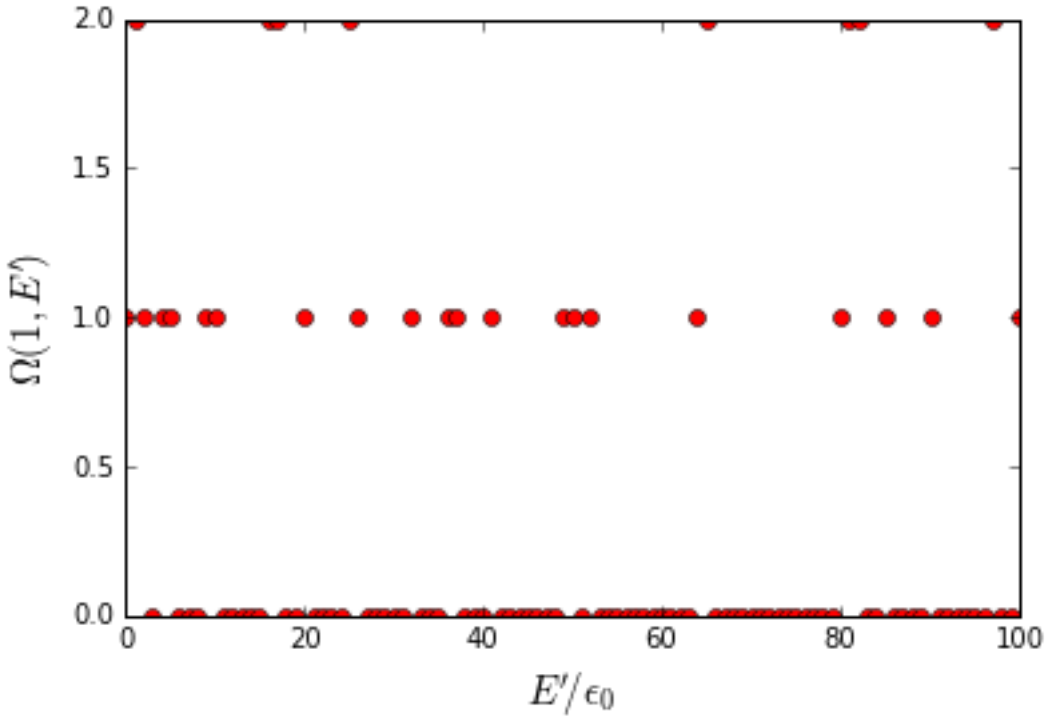
$$\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{E,V} = s\left(\frac{E}{N}\right) + N\frac{\partial s}{\partial N} = s(e) + N\frac{\partial s}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial N} \longrightarrow \frac{\partial e}{\partial N} = \frac{\partial \frac{E}{N}}{\partial N} = -\frac{E}{N^2}$$

$$\text{la enrgia por particula en el limite termodinamico es e} = \frac{E}{N}$$

$$-\frac{\mu}{T} = s(e) + N\frac{\partial s}{\partial e}\frac{E}{N^2} \longrightarrow -\frac{\mu}{T} = s(e) + e\frac{\partial s}{\partial e}$$

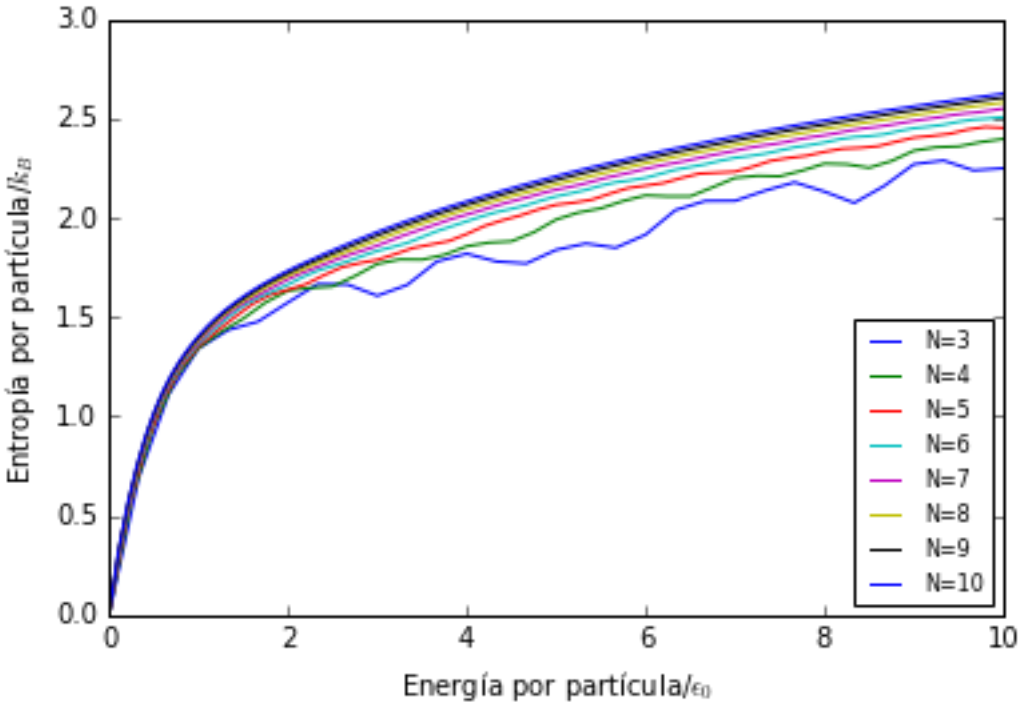
2. Punto 2

Ahora para calcular los estados de energía degenerados aplicamos un métodos recursivo sobre la definición de la energía por partícula:
def epsilon(p, q):
return p**2+q**4
Para calcular la cantidad de micro estados el metodo que se utiliso fue organisar el problema en forma de una matrizasi haciendo uso de las cordenada i,j de la matriz para poder calcular los difrente valores de particualas y los valors de la enregia aasi que generamos una matri Omat[#particulas,E+1], es para mantener consitenete los indices dentro del metodo.El metodo lo que hace es que usa cada los vlaores numericos de las componetes de las matrices para hacer el calculo de cuantos micro estados hay para i particulas y j energia del sistema con esto en cada cordenada de la matriz lo que se tiene es el numero respectivo de micro estados para sus parametros :
def cal(Omat):
systemE=len(Omat[0,:])-1
pmax=int(1+systemE**0.5)
qmax=int(1+systemE**0.25)
for p in range(pmax):
for q in range(qmax):
partEnergy=epsilon(p, q)
if(partEnergy¡=systemE):
Omat[0,partEnergy]+=1
for n in range(1,len(Omat[:,0])):
for e in range(len(Omat[0,:])):
for ep in range(e+1):
Omat[n, e]+=Omat[n-1, e-ep]*Omat[0, ep]
return Omat

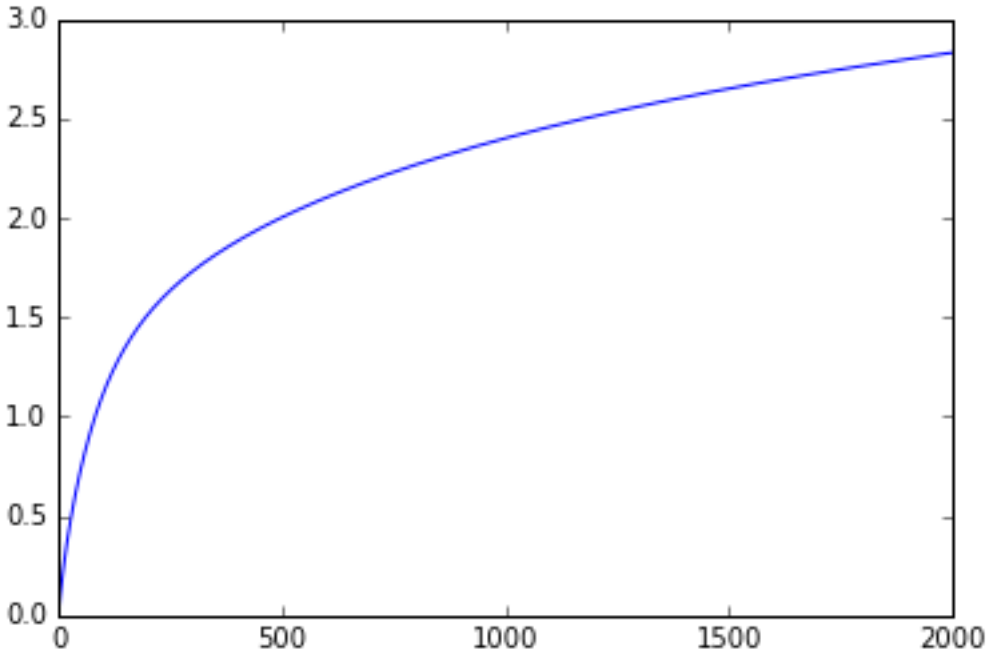


Ahora con este metodo podemos ver el comportaminto de los micro eestdos para diferentes valore de energia y de particualas en el cual son necesitamos las dos funcione definidas antes y hacemos un metodo recursivo sobre estos.

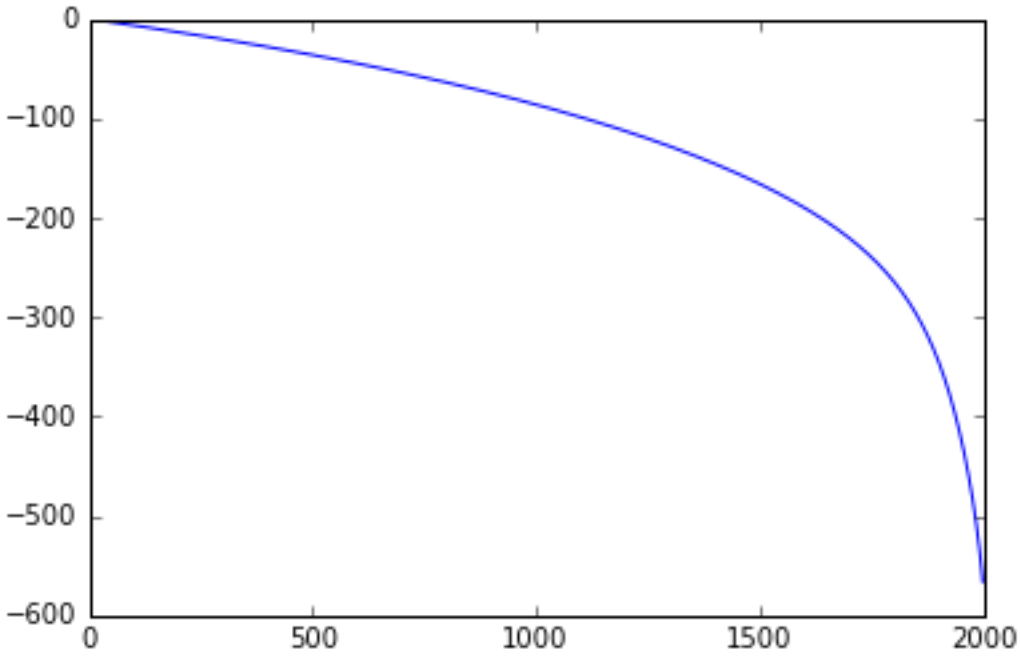
```
for n in range(1,len(EoverN[:,0])):
for e in range(len(EoverN[0,:])):
EoverN[n,e]=float(e)/float(n)
for i in range(3,11):
plt.plot(EoverN[i,:],
Stoplot[i,:]/float(i),label=('N= %d' %i))
```



ahora con estos calcular la entropia por particual es muy sencillo es solo coger la fila respectiva a al energia buscada y sacar el logaritmo de esta y normalizar asi que:
plt.plot(np.log(Omat[-1,:])/200)



Ahora para verificara el comportamiento Δ para poder aplicar la aproximacion de la ecuacion 4 tenemos que con el mismo arreglo de antes modificar un el plot y podemos ver su tendencia:


0
−100
−200
−300
−400
−500
−600
0
500
1000
1500
2000