Tarea 4 Particulas

Javier A. Zúñiga C - Sergio Gutiérrez-

Septiembre 2016

Punto 10

10.1)

Suponemos que la solución de onda plana está dada por $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$, pero definiendo $x = (x_1, x_2, x_3)$ obtemenos que:

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = e^{ix_3} = \psi$$

$$\text{Por definición: } \psi(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} j_n(r) Y_n(\theta,\varphi)$$

Así que proponemos:

$$e^{ikx_3} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l(r) Y_{l,m}(\theta,\varphi) \ , Y_{l,m} = A_l^m P_l^m(cos(\theta)) e^{im\varphi} \ , A_l^m = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$$

Debido a que no exite dependencia del ángulo azimuthal $m = 0$:

$$e^{ikx_3} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l(r) Y_{l,0}(\theta,\varphi) \ , Y_{l,0} = A_l^0 P_l(cos(\theta))$$

$$A_l^0 = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \Rightarrow e^{ik\cdot r} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l(r) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(cos(\theta))$$

Ahora, podemos identificar a C_l como la contante de ortogonalización de la función, por tanto si comparamos con las funciones armónicas esféricas y sus

respectivos coeficientes (VI-4.77)Tellez:

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}c_{l,m}Y_{l,m}\ ,c_{l,m}=(Y_{l,m}|f)=\int\int_{S3}\overline{Y(\theta,\varphi)}f(\theta,\varphi)d\Omega$$

$$\Rightarrow C_l=\int\int_{S3}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(cos(\theta))e^{ik\cdot r}d\Omega=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}P_l(cos(\theta))e^{ik\cdot r}sin(\theta)d\theta d\varphi$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\int_0^{\pi}P_l(cos(\theta))e^{ikrcos(\theta)}sin(\theta)d\theta$$

$$x=cos(\theta);\quad dx=-sin(\theta)d\theta\qquad cos(0)=1;\quad cos(\pi)=-1$$

$$=-2\pi\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\int_1^{-1}P_l(x)e^{ikrx}dx=2\pi\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\int_{-1}^{1}P_l(x)e^{ikrx}dx$$

10.2)

Utilizando la expresión hallada en el lieteral anterior:

$$C_l=2\pi\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\int_{-1}^{1}P_l(x)e^{ikrx}dx$$

$$\frac{ikr}{ikr}\int_{-1}^{1}P_l(x)e^{ikrx}dx=\frac{1}{ikr}\int_{-1}^{1}P_l(x)ikre^{ikrx}dx$$

$$u=P_l(x);\quad du=\frac{dP_l(x)}{dx}dx=\frac{-P_l^1(x)}{\sqrt{1-x^2}};\quad dv=ikre^{ikr}\quad v=e^{ikr}$$

$$\int_{-1}^{1}P_l(x)e^{ikrx}dx=\frac{1}{ikr}P_l(x)e^{ikrx}\Big|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\frac{P_l^1(x)}{\sqrt{1-x^2}}e^{ikrx}dx$$

$$=\frac{1}{ikr}\left(P_l(1)e^{ikr}-P_l(-1)e^{-ikr}\right)+\int_{-1}^{1}\frac{P_l^1(x)}{\sqrt{1-x^2}}e^{ikrx}dx$$

Indaguemos un poco en los polinomios:

$$P_l(-x)\equiv\sum_{k=0}^{E(l/2)}\frac{(l-k-1/2)!}{(-1/2)!}\frac{(-1)^k}{k!(l-2k)!}(2x)^{l-2k}$$

$$P_l(x)\equiv\sum_{k=0}^{E(l/2)}\frac{(l-k-1/2)!}{(-1/2)!}\frac{(-1)^k}{k!(l-2k)!}(-2x)^{l-2k}=\frac{(l-k-1/2)!}{(-1/2)!}\frac{(-1)^k}{k!(l-2k)!}(2x)^{l-2k}(-1)^{l-2k}$$

$P_l(-x)=(-1)^{l-2k}P_l(x)$ $x$nótese que: $(-1)^{l-2k}=(-1)^l$ $P_l(-x)=(-1)^lP_l(x)$

Volviendo al término que nos interesa:

$$\frac{1}{ikr}\left(P_l(1)e^{ikr} - P_l(-1)e^{-ikr}\right) + \int_{-1}^{1} \frac{P_l^1(x)}{\sqrt{1-x^2}} e^{ikrx} dx$$

$$= \frac{1}{ikr}\left(P_l(1)e^{ikr} - P_l(1)(-1)^l e^{-ikr}\right) + \int_{-1}^{1} \frac{P_l^1(x)}{\sqrt{1-x^2}} e^{ikrx} dx$$

$$= \frac{1}{ikr}\left(P_l(1)e^{ikr} - P_l(1)(i^2)^l e^{-ikr}\right) + \int_{-1}^{1} \frac{P_l^1(x)}{\sqrt{1-x^2}} e^{ikrx} dx$$

nótese ahora que si multiplicmaos y dividimos por $i^l = e^{il\frac{\pi}{2}}$

$$= \frac{i^l}{ikr} P_l(1)\left(i^{-l}e^{ikr} - i^l e^{-ikr}\right) + \int_{-1}^{1} \frac{P_l^1(x)}{\sqrt{1-x^2}} e^{ikrx} dx$$

Es claro que el segundo término (el de la integral por partes) corresponde a un segundo orden de $(ikr)^{-2}$ entonces podemos decir que:

$$\int_{-1}^{1} P_l(x) e^{ikrx} dx = \frac{i^l}{ikr} P_l(1)\left(e^{ikr - l\pi/2} - e^{-(ikr - \pi l/2)}\right) + \mathcal{O}((kr)^{-2})$$

Nuevamente al introducirla en la ecuación e^{ikx_3} Obtenemos:

$$e^{ikx_3} \sim \sum_{l=0}^{\infty} C_l(r) Y_{l,0}(\theta, \varphi)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} 2\pi \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left(\frac{i^l}{ikr} P_l(1)\left(e^{ikr - l\pi/2} - e^{-(ikr - \pi l/2)}\right) + \mathcal{O}((kr)^{-2})\right) Y_{l,0}(\theta, \varphi)$$

si analisamos el el limite de r para ver el comportamiento asintotico

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{l=0}^{\infty} 2\pi \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left(\frac{i^l}{ikr} P_l(1)\left(e^{ikr - l\pi/2} - e^{-(ikr - \pi l/2)}\right) + \mathcal{O}((kr)^{-2})\right) Y_{l,0}(\theta, \varphi)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} 2\pi \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left(\frac{i^l}{ikr} P_l(1)\left(e^{ikr - l\pi/2} - e^{-(ikr - \pi l/2)}\right)\right) Y_{l,0}(\theta, \varphi)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} i^l 2\pi \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{2}{ikr} sin\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right) Y_{l,0}(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l 4\pi \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} j_l(kr) Y_{l,0}(\theta, \varphi)$$

$$e^{ikx_3} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{(2l+1)4\pi} j_l(kr) Y_{l,0}(\theta, \varphi) \longleftarrow C_l = i^l \sqrt{(2l+1)4\pi} j_l(kr)$$

10.3)

Ahora si asumimos que la constante C_l es valida en general y tratamos de aplicar el teorema de adición de armónicos esféricos, recordemos las definiciones que tenemos a la mano:

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l(r) Y_{l,0}(\theta,\varphi)\ ,\ P_l(cos\theta) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}[Y_l^m(\theta_k,\psi_k)]^* Y_l^m(\theta_x,\psi_x)$$

$$Y_l^m(\theta,\psi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(cos\theta)e^{im\psi}$$

Ahora si aplicamos esta definiciones a los resultados anteriores

$$Y_l^0(\theta,\psi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(cos\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}[Y_l^m(\theta_k,\psi_k)]^* Y_l^m(\theta_x,\psi_x)$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\sum_{m=-l}^{l}[Y_l^m(\theta_k,\psi_k)]^* Y_l^m(\theta_x,\psi_x)$$

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l\sqrt{(2l+1)4\pi} j_l(kr)\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\sum_{m=-l}^{l}[Y_l^m(\theta_k,\psi_k)]^* Y_l^m(\theta_x,\psi_x)$$

Simplificando las constantes encontradas en el punto anterior obtenemos un expresión general para $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty} i^l j_l(kr)\sum_{m=-l}^{l}[Y_l^m(\theta_k,\psi_k)]^* Y_l^m(\theta_x,\psi_x)$$

10.4)

Utilizando la fórmula de Rodriguez:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l\left[(x^2-1)^l\right],\ \int_{-1}^{1} x^l P_l(x)dx = \int_{-1}^{1} x^l\frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l\left[(x^2-1)^l\right]dx$$

aplicando partes:

$$dv = x^l;\ v = \frac{x^{l+1}}{l+1}\ u = \left(\frac{d}{dx}\right)^l\left[(x^2-1)^l\right];\ du = \left(\frac{d}{dx}\right)^{l+1}\left[(x^2-1)^{l-1}\right]2lx(x^2-1)$$

$$= \frac{1}{2^l l!}\frac{x^{l+1}}{l+1}\left(\frac{d}{dx}\right)^l\left[(x^2-1)^l\right]\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$-\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\frac{1}{l+1}x^{l+1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{l+1}\left[(x^2-1)^{l-1}\right]2lx(x^2-1)dx$$

Realizamos la última integral por partes varias veces:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{l+1} x^{l+2} \left(\frac{d}{dx}\right)^{l+1} \left[(x^2-1)^{l-1}\right] 2l(x^2-1)dx$$

Como es previsible, cada vez que se deriva salen téminos que depende de x y de (x^2-1) y es precisamente el primero el que le da un factor extra a la integral de tal manera de que cuando se realiza l veces se obtiene un término demás (+1). Ahora, para nuestra demostración nosotros trabajaremos solamente los que facilemente podemos identificar como cadenas, entonces tomando de la integral anterior solamente los términos que nos interesan (luego se explicará qué pasa con los otros) y realizando el mismo procedimiento l veces vamos a llegar a:

$$(...)|_{-1}^{1} + \frac{1}{2^l l!} \frac{(l)^2(l-1)^2...(1)^2 2^{2l}}{(l+1)(l+2)...(2l+1)} (x)|_{-1}^{1} = \frac{2^l (l!)^2}{(2l+1)!} (x)|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

Donde $f(x)$ es el último término de la integral por partes. Mientras los otros términos se pueden explicar que se desvanecen por relaciones de recurrencia de derivadas que se presentan como $\frac{\partial P_{l+1}}{\partial x} - \frac{\partial P_{l-1}}{\partial x} = l(l+1)P_l$, lo cual dice que podemos ir cancelando de ser posible los términos siguientes. Por otra parte, cada vez que se realizaba una derivada surgían términos evaluados en -1 y 1 los cuales finalmente al evaluarlos es posible darse cuenta que se desvanecen. Pare l par, es fácil darse cuenta a ojo, sin embargo para l impar, se utiliza la propiedad hallada en el literal 10.2 y se entiende que dichos términos se hacen 0. Finalmente se obtiene que:

$$\int_{-1}^{1} x^l P_l(x)dx = \frac{2^{l+1}(l!)^2}{(2l+1)!}$$

10.5)

Dada la ecuación:

$$e^{ikrcos(\lambda)} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l j_l(kr) P_l(cos\lambda)$$

Podemos ver que esta es la misma definición usada para la forma general de $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ donde λ es el ángulo entre k y x asi que podemos aplicar la ortogonalidad de los polinomios de legendre:

$$e^{ikrcos\lambda} \int_{-1}^{1} P_m(cos\lambda)d(cos\lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l j_l(kr) P_l(cos\lambda) \int_{-1}^{1} P_m(cos\lambda)d(cos\lambda)$$

Entonces si hacemos un cambio de variable $x = cos\lambda$ y la definicion de la ortogonalidad:

$$\int_{-1}^{1} e^{ikrx} P_m(x)dx = \sum_{l=0}^{\infty} a_l j_l(kr) \int_{-1}^{1} P_l(x)P_m(x)dx$$

definamos $\alpha = kr$ ademas vemos que solo hay un valor en la suma cuando m=l

$$a_l j_l(\alpha)\frac{2}{2l+1} = \int_{-1}^{1} P_l e^{i\alpha x} P_l(x)dx \;\; a_l j_l(\alpha) = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} P_l e^{i\alpha x} P_l(x)dx$$

Ahora derivamos con respecto a α l veces la expresión obtenida:

$$\frac{\partial^l a_l j_l(\alpha)}{\partial \alpha^l} = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} x^l i^l e^{i\alpha x} P_l(x)dx$$

igualamos $\alpha = 0$:

$$a_l j_l^{(l)}(0) = \frac{2l+1}{2} i^l \int_{-1}^{1} x^l P_l(x)dx = (i)^l \frac{2l+1}{2}\frac{2^{l+1}(l!)^2}{(2l+1)!}$$

Punto 11

Suponemos entonces que tenemos una función de onda que podemos seccionar en ψ_{in} y ψ_{out} donde cada una está dada por:

$$\psi_{in} = e^{ikx_3}; \;\; \psi_{out} = f(k,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$$

11.1)

Utilizando los resultados de la corriente de la tarea anterior:

$$\vec{j} = \frac{-i\hbar}{2m}\left(\psi^* \nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right)$$

Al introducir ψ_{in} en la ecuación de la corriente obtenemos:

$$\vec{j}_{in} = \frac{-i\hbar}{2m}\left(e^{-ikx_3}\nabla e^{ikx_3} - e^{ikx_3}\nabla e^{-ikx_3}\right) = \frac{-i\hbar}{2m} ik \left(e^{-ikx_3}e^{ikx_3}\hat{x_3} + e^{ikx_3}e^{-ikx_3}\hat{x_3}\right)$$

$$\vec{j}_{in} = \frac{k\hbar}{m}\hat{x_3}$$

Ahora, introducimos ψ_{out} en la ecuación de la corriente y obtenemos:

$$\vec{j}_{out} = \frac{-i\hbar}{2m}\left(f(k,\theta)\frac{e^{-ikr}}{r}\nabla f(k,\theta)\frac{e^{ikr}}{r} - f(k,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\nabla f(k,\theta)\frac{e^{-ikr}}{r}\right)$$

Desarrollaremos el término $\nabla\psi$ y luego continuaremos con la corriente:

$$\nabla\psi = \nabla\left(f(k,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\right)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{1}{rsin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \Rightarrow \nabla\psi = \left(f(k,\theta)\frac{\partial\frac{e^{ikr}}{r}}{\partial r}, \frac{e^{ikr}}{r^2}\frac{\partial f(k,\theta)}{\partial\theta}\right)$$

$$= \left(f(k,\theta)\left(ik\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2}\right), \frac{e^{ikr}}{r^2}\frac{\partial f(k,\theta)}{\partial\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla\psi^* = \left(f(k,\theta)\left(-ik\frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{e^{-ikr}}{r^2}\right), \frac{e^{-ikr}}{r^2}\frac{\partial f(k,\theta)^*}{\partial\theta}\right)$$

Al poner todo en la ecuación de la corriente vemos que:

$$\vec{j}_{out} = \frac{-i\hbar}{2m}\left(|f(k,\theta)|^2\left(\frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} + \frac{ik}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right), \frac{f(k,\theta)^*}{r^3}\frac{\partial f(k,\theta)}{\partial\theta} - \frac{f(k,\theta)}{r^3}\frac{\partial f(k,\theta)^*}{\partial\theta}\right)$$

$$\vec{j}_{out} = \frac{-i\hbar}{2m}\left(\frac{2ik|f(k,\theta)|^2}{r^2}, \frac{f(k,\theta)^*}{r^3}\frac{\partial f(k,\theta)}{\partial\theta} - \frac{f(k,\theta)}{r^3}\frac{\partial f(k,\theta)^*}{\partial\theta}\right)$$

$$\lim_{r^3>>r^2}\frac{-i\hbar}{2m}\left(2\frac{ik|f(k,\theta)|^2}{r^2}, \frac{f(k,\theta)^*}{r^3}\frac{\partial f(k,\theta)}{\partial\theta} - \frac{f(k,\theta)}{r^3}\frac{\partial f(k,\theta)^*}{\partial\theta}\right) = \frac{\hbar k}{m}\frac{|f(k,\theta)|^2}{r^2}\hat{e}_r$$

11.2)

Definimos la sección eficaz como:

$$d\sigma = \frac{\vec{j}_{out}\cdot\hat{e}_r r^2 d\Omega}{\left|\vec{j}_{in}\right|}$$

Ahora si aplicamos la corriente encontrada en el punto anterior obtenemos

$$\vec{j}_{out}\cdot\hat{e}_r = \frac{\hbar k}{m}\frac{|f(k,\theta)|^2}{r^2} \Rightarrow d\sigma = \frac{\vec{j}_{out}\cdot\hat{e}_r r^2 d\Omega}{\left|\vec{j}_{in}\right|} = \frac{\hbar k}{m}\frac{|f(k,\theta)|^2}{r^2}\frac{mr^2 d\Omega}{\hbar k} = |f(k,\theta)|^2 d\Omega$$

Punto 12

12.1)

definimos las siguientes funciones:4

$$f(k,\theta) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)a_l(k)P_l(cos(\theta)) \ , \sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega$$

Entonces nos queda:

$$\sigma = \int_0^{\pi} |f(k,\theta)|^2 d\Omega = \int_0^{\pi} \left|\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)a_l(k)P_l(cos(\theta))\right|^2 d\Omega$$

$$= \frac{1}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)^2 a_l^2 \int P_l(cos(\theta))^2 d\Omega \text{ Sabemos que: } Y_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(cos(\theta))$$

Por lo tanto podemos escribir: $P_l(cos(\theta))^2 = P_l(cos(\theta))P_{l'}(cos(\theta))\delta_{ll'}$

$$P_l(cos\theta)^2 = Y_{l0}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y_{l'0}\sqrt{\frac{4\pi}{2l'+1}}\delta_{ll'}$$

$$\sigma = \frac{1}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)^2|a_l(k)|^2\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\sqrt{\frac{4\pi}{2l'+1}}\int_{-1}^{1} Y_{l0}Y_{l'0}\delta_{ll'}d\Omega$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)|a_l(k)|^2$$

12.2)

Teniendo en cuenta que:

$$e^{ikx_3} \sim \sum_{l=0}^{\infty}(i)^l\sqrt{4\pi(2l+1)}j_l(kr)Y_{l,0}(\theta,\phi)$$

Y además que:

$$\psi_{somm}(\vec{x}) \sim e^{ikx_3} + f(k,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$$

Entonces al introducir en el primer término de la ecuación anterior:

$$\psi_{somm}(\vec{x}) \sim \sum_{l=0}^{\infty}(i)^l\sqrt{4\pi(2l+1)}j_l(kr)Y_{l,0}(\theta,\phi) + f(k\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\lim_{r\to\infty}\psi_{somm} \sim \lim_{r\to\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(i)^l\sqrt{4\pi(2l+1)}j_l(kr)Y_{l,0}(\theta,\phi) + f(k\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$$

Debido a que la función $j_l(kr)$ presenta un comportamiento aproximado al de $\frac{1}{kr}sin\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)$ cuando $r \to \infty$ podemos ver que:

$$\frac{1}{kr}sin\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2ikr}\left(e^{ikr-l\pi/2} - e^{-ikr+l\pi/2}\right)$$

Entonces:

$$\lim_{r\to\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(i)^l\sqrt{4\pi(2l+1)}j_l(kr)Y_{l,0}(\theta,\phi) + f(k\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2ikr}\left(e^{ikr-l\pi/2} - e^{-ikr+l\pi/2}\right)(i)^l\sqrt{4\pi(2l+1)}Y_{l,0}(\theta,\phi) + f(k\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\frac{i^l}{2ikr}\left(e^{ikr-l\pi/2}\left[\sqrt{4\pi(2l+1)}Y_{l,0}(\theta,\phi) + 2ikf(k,\theta)e^{il\pi/2}\right] - e^{-ikr+\pi/2}\left[\sqrt{4\pi(2l+1)}Y_{l,0}(\theta,\phi)\right]\right)$$

$$= \frac{-e^{-ikr}}{2ikr}\left(\sum_{l=0}^{\infty}i^l e^{il\pi/2}\sqrt{4\pi(2l+1)}Y_{l,0}(\theta,\phi)\right)$$

$$+\frac{e^{ikr}}{2ikr}\left(\sum_{l=0}^{\infty}i^l e^{-il\pi/2}\sqrt{4\pi(2l+1)}Y_{l,0}(\theta,\phi) + 2ikf(k,\theta)\right)$$

12.3)

Ahora vamos la ecuación:

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}c_l u_l(r)Y_{l,0}(\theta)$$

El comportamiento para u_l para $r \to \infty$ es igual al de $sin\left(kr - l\frac{\pi}{2} + \delta_l(k)\right)$. Entonces podemos darnos cuenta que:

$$sin\left(kr - l\frac{\pi}{2} + \delta_l(k)\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{ikr-l\pi/2+\delta_l(k)} - e^{-ikr+l\pi/2-\delta_l(k)}\right)$$

Reemplazando en $\psi(\vec{x})$ se llega a:

$$\psi(\vec{x}) \sim \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}c_l Y_{l,0}(\theta)\frac{1}{2i}\left(e^{ikr-l\pi/2+\delta_l(k)} - e^{-ikr+l\pi/2-\delta_l(k)}\right)$$

$$\psi(\vec{x}) \sim \frac{-e^{-ikr}}{2ir}\left(\sum_{l=0}^{\infty}c_l Y_{l,0}(\theta)e^{il\pi/2}e^{-i\delta_l(k)}\right) + \frac{e^{ikr}}{2ir}\left(\sum_{l=0}^{\infty}c_l Y_{l,0}(\theta)e^{-il\pi/2}e^{i\delta_l(k)}\right)$$

12.4)

Como la función de onda no depende del ángulo azimutal, podemos entonces proponer una expresión de la forma

$$f(k,\theta) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)a_l(k)P_l(cos\theta)$$

de el punto anterior podemos deducir que $f(k,\theta)$

$$f(k,\theta) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{e^{i2\delta_i}-1}{2i}(2l+1)P_l(cos\theta)$$

si igualamos las dos expreciones y aplicamos la ortogonalidad de los polinomios

$$\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)a_l(k)P_l(cos\theta) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{e^{i2\delta_i}-1}{2i}(2l+1)P_l(cos\theta)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}a_l(k)P_l(cos\theta)\int_{-1}^{1}P_{l'}(cos\theta)d(cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{e^{i2\delta_i}-1}{2i}P_l(cos\theta)\int_{-1}^{1}P_{l'}(cos\theta)d(cos\theta)$$

como se habia mencionado antes vemos que solo hay un termino en la suma l=m

$$a_l(k)\frac{2}{2l+1} = \frac{e^{i2\delta_i}-1}{2i}\frac{2}{2l+1} \longrightarrow a_l(k) = e^{i\delta_i}\frac{e^{i\delta_i}-e^{-i\delta_i}}{2i}$$

$$a_l(k) = e^{i\delta_i}sen\delta_i$$