# Tarea 5 Particulas

Javier A. Zúñiga C - Sergio Gutiérrez-

October 2016

## 13)

Emezamos por resolver la ecuación de Schrodinger en esféricas

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(r)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Utilizamos separación de variables para resolver la ecuación de Schrodinger:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{^2 sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\right]\psi + V(r)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Ahora suponemos que la solución de la ecuación corresponde a:

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi)$$

Ahora, reemplazando y dividiendo entre $R(r)Y(\theta,\phi)$ obtenemos:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\frac{Y(\theta,\phi)}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + \frac{R(r)}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right) + \frac{R(r)}{r^2 sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 Y(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}\right)\right] + V(r)R(r)Y(\theta,\phi) = ER(r)Y(\theta,\phi)$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{R(r)r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + \frac{1}{Y(\theta,\phi)r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{Y(\theta,\phi)r^2 sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 Y(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}\right)\right] + V(r) = E$$

El siguiente paso es multiplicar por $-r^2\frac{2m}{\hbar}$

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + \frac{1}{Y(\theta,\phi)sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{Y(\theta,\phi)sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 Y(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}\right) - r^2\frac{2m}{\hbar}V(r) + Er^2\frac{2m}{\hbar} = 0$$

Como es usual, entonces manejaremos las soluciones por separado de tal froma que:

$$\left[\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)-r^2\frac{2m}{\hbar}\left(V(r)-E\right)\right]$$
$$+\frac{1}{Y(\theta,\phi)sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y(\theta,\phi)sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 Y(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}\right)=0$$

Suponemos entonces las soluciones independientes:

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)-r^2\frac{2m}{\hbar}\left(V(r)-E\right)=l(l+1)$$

$$\frac{1}{Y(\theta,\phi)}\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 Y(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}\right)\right]=-l(l+1)$$

Para la ecuación angular separamos nuevamente $Y(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi)$, realizando el mismo procedimiento pasado obtenemos la ecuación:

$$\left\{\frac{1}{\Theta(\theta)}\left[sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)\right]+l(l+1)sin^2\theta\right\}+\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}=0$$

Sea $\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}=-m^2$
Entonces la solución del ángulo azimuthal es:

$$\Phi=e^{im\phi}$$

Mientras que para el otro recurrimos a la fórmula de Rodriguez de los Polinomios de Legendre, por tanto recaemos en os armónicos esféricos (utilizados anteriormente), de ahí que la ecuación angular es:

$$Y_{l,m}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}P_{l,m}(cos(\theta))e^{im\phi}$$

Nótese que no existe dependencia del ángulo azimuthal, por tanto $m=0$

$$Y_{l,0}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}}P_{l,0}(cos(\theta))$$

Asi que podemos conlcuir con lo anterior y que la funcion de onda esta dada por un momento angular de la forma $R(r)Y(\theta,\phi)$. Asi que podemos escribir una solucion general para la funcionde onda como:

$$\psi(\vec{r})=\frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}}\sum_l i^l(2l+1)\psi_l(r)P_l(cos\theta)$$

# 1. Desarrollo

Como se demostró anteriormete, esta ecuación proviene de asumir que se requieren constantes de integración para cada l diferente, de ahí que si ahondamos más en los términos como tal recaeremos en los $a_l$

$$\frac{d^2}{dr^2}\psi_l + \frac{2}{r}\frac{d\psi_l}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}\psi_l + [k^2 - U(r)]\psi_l = 0 \ , \ k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \ , \ U(r) = \frac{2m}{\hbar^2}V(r)$$
$$U(r) \to 0 \ \ r \to \infty \ , \ \frac{d^2}{dr^2}\psi_l + \frac{2}{r}\frac{d\psi_l}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}\psi_l + k^2\psi_l = 0$$

si consideramos la solucion del potencial cuadrado.

$$\psi_0(r) = \frac{A}{r}sin(kr+\delta) = \frac{A}{r}[sinkr\ cos\delta + coskr\ sin\delta]$$
$$= kA[j_0(kr)\ cos\delta + n_0(kr)\ sin\delta]$$

asi para cualquier l

$$\psi_l(r) = kA_l[\ j_l(kr)\ cos\delta + n_l(kr)\ sin\delta] \text{ para } r \to \infty$$
$$j_l(kr) = \frac{1}{kr}sin\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right) \ , \ j_l(kr) = \frac{1}{kr}cos\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)$$
$$\psi_l(r) = \frac{A_l}{kr}sin\left(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l\right) \quad r \to \infty$$

Si reescribimos la solución de la función de onda para ver como es el comportamiento asintótico de esta onda que sufrió dispersión.

$$\psi_l(r) = \frac{A_l e^{-i\delta_l}}{2ikr}\left[e^{-2i\delta_l}e^{i\left(kr-\frac{\pi l}{2}\right)} - e^{-i\left(kr-\frac{\pi l}{2}\right)}\right]$$
$$\psi_l(r) = \frac{A_l e^{-i\delta_l}}{2ikr}\left[2i\sin\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right) + \left(e^{-2i\delta_l} - 1\right)e^{i(kr-\frac{\pi l}{2})}\right]$$
$$-\psi_l(r) \to A_l e^{-i\delta_l}\left[j_l(kr) + \frac{(-1)^l}{2ik}\left(e^{-2i\delta_l} - 1\right)\frac{e^{ikr}}{r}\right]$$

Asi encontrando una solucion para la funcion de onda de la onda que sufrido disersion en el infinito

$$\psi_l(r) \to \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}}\left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + f(k,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\right)$$

y usando la ecuacion 9, 15 y 16 de la tarea 4 .

$$a_l(k) = e^{i\delta_l}\sin(\delta_l)$$

utilisando esta valor de la amplitud de fase py remplzando en las ecuaciones mencionadas anates tenemos que:

$$\sigma = \sigma(k) = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)sin^2(\delta_l)$$

Utilizando entonces:

$$sin(\sigma_l) = \frac{-2m}{\hbar^2}\int_0^\infty rU(r)j_l(r)dr = sin(\sigma_l) = \frac{-2m}{\hbar^2}\int_0^\infty sin(kr - l\frac{\pi}{2} + \sigma_l(k))rVj_l(r)dr$$

Analiticamente es bastante comlicado obtener dichos valores, sin embargo numericamente es posible hallarlos. Entonces, las gráficas correspondientes podemos verlas a continuación:

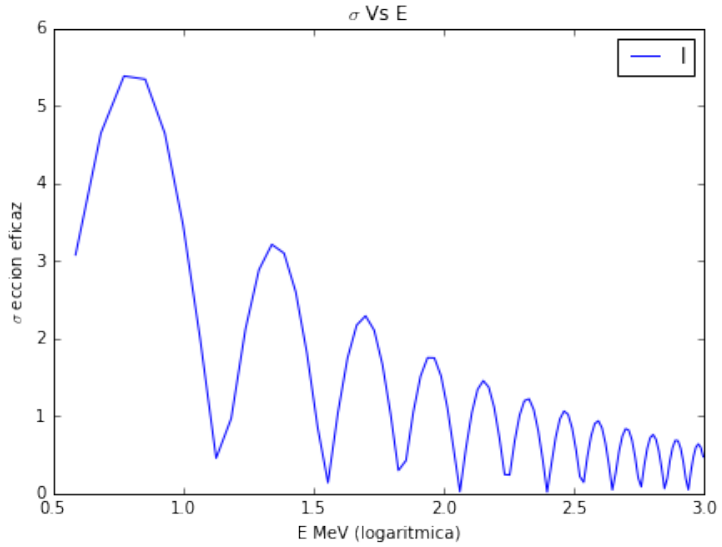



Figura 1: Comportamiento del la sección eficaz para l = 0

Ahora, para hallar $l = 1$ utilizamos la propiedad de que $J_0'(x) = -J_1(x)$. Al avanzar obtenemos que la contribución de los $l$ puede ser escrita como:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}(|f_0|^2 + 3|f_1|^2)$$

Ahora si comparamos con la definicion de la secion eficas diferencial =:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{k^2}\left|\sum_l (2l+1)a_l(k)P_l(cos\theta)\right|$$

si calculamos la contibucion por l=1 y l=0

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2}\left[|f_0|^2 + 9|f_1|^2 cos^2\theta + 3(f_0 f_1^* + f_0^* f_1)\ cos\theta\right]$$

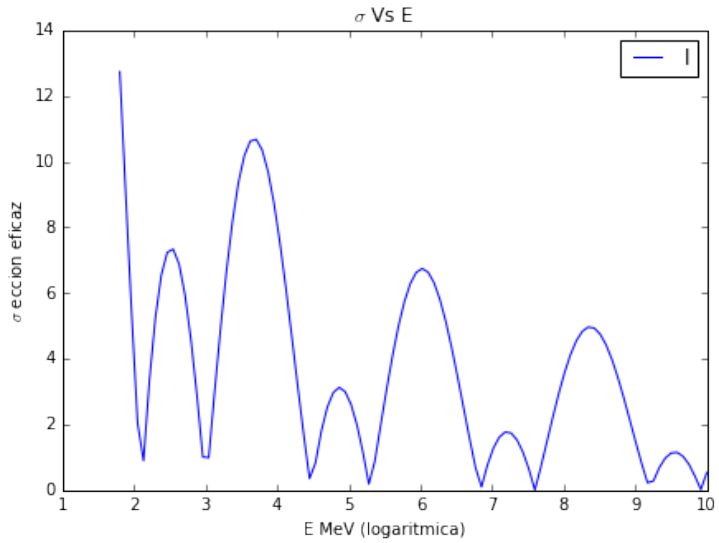



Figura 2: Comportamiento del la sección eficaz para l = 1