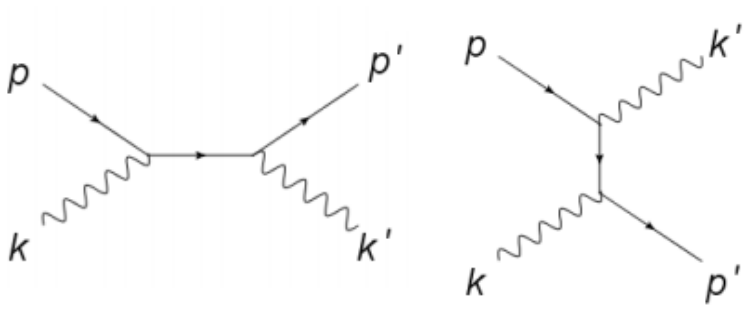
Tarea 7 partículas

Sergio Gutierrez Javier Zúñiga C

November 2016

16)

Aplicando los diagramas de Feymman para Compoton Scattering asumimos que es una interacción fotón - electrón. Notese que si estamos hablando de el orden más bajo de este tipo de Scattering vamos a tener solo un propagador, es decir dos vértices. De ahí que podemos decir que si tenemos un electrón, este sólo tiene dos opciones para interactuar con un fotón: emitirlo o recibirlo (aniquilarlo). Esto se argumenta en base a que en el rango de la incertidumbre de Heissemberg pueden existir dos procesos que muestra



(a) Diagrama 1 (b) Diagrama 2

Figura 1: Diagramas de Feynman de scattering de compton a orden más bajo.

Reglas de Feynman:

- Por cada vértice escriba un factor $ie\gamma^{\beta}$ dependiendo de la letra del nombre del vértice.
- Por cada linea interna fermiónica escriba un factor $i\frac{\not{P}+m}{P^2-m^2+i\epsilon}$.
- Por cada linea externa de electron inicial escribir $u_r(p)$.
- Por cada linea externa de electrón final escribir $\overline{u}_r(p)$.
- Por cada linea externa de fotón inicial agregamos $\epsilon_{r\beta}(k)$.
- Por cada linea externa de fotón inicial agregamos $\epsilon^*_{r\beta}$.

- Por cada linea fermiónica se ordenan de tal forma que. leyendo de derecha a izquierda vayan apareciendo en el mismo orden que aparecen en la linea fermiónica al seguir la dirección de la frlecha de principio a fin.

Usaremos las reglas entonces sobre el diagrama 1. Nombraremos el vértice de la izquierda μ y el de la derecha ν. Así pues, empezamos de izquierda a derecha:

$$u_r(p)ie\gamma^\mu i\frac{\not{p}+\not{k}+m}{(p+k)^2-m^2+i\epsilon}ie\gamma^\nu\overline{u_r}(p')\epsilon^*_\nu(k')\epsilon_\mu(k)$$

$$\mathcal{M}_1=\epsilon_\mu(k)\epsilon^*_\nu(k')\overline{u_r}(p')ie\gamma^\nu i\frac{\not{p}+\not{k}+m}{(p+k)^2-m^2+i\epsilon}ie\gamma^\mu u_r(p)$$

$$=-ie^2\epsilon_\mu(k)\epsilon^*_\nu(k')\overline{u_r}(p')\gamma^\nu\frac{\not{p}+\not{k}+m}{(p+k)^2-m^2+i\epsilon}\gamma^\mu u_r(p)$$

Mientras tanto, para el segndo diagrama nombraremos el vértice superior μ y el inferior ν. Así, podemos darnos cuenta que al utilizar las reglas de Feynman obtenemos:

$$\mathcal{M}_2=\epsilon_\mu(k)\epsilon^*_\nu(k')\overline{u_r}(p')ie\gamma^\nu i\frac{\not{p}-\not{k}'+m}{(p-k')^2-m^2+i\epsilon}ie\gamma^\mu u_r(p)$$

$$=-ie^2\epsilon_\mu(k)\epsilon^*_\nu(k')\overline{u_r}(p')\gamma^\nu\frac{\not{p}-\not{k}'+m}{(p-k')^2-m^2+i\epsilon}\gamma^\mu u_r(p)$$

La matriz de amplitud total $\mathcal{M}$ está dada por $\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2$.

$$\mathcal{M}_T=\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2=-ie^2\epsilon_\mu(k)\epsilon^*_\nu(k')\overline{u_r}(p')\gamma^\nu\frac{\not{p}+\not{k}+m}{(p+k)^2-m^2+i\epsilon}\gamma^\mu u_r(p)$$

$$+-ie^2\epsilon_\mu(k)\epsilon^*_\nu(k')\overline{u_r}(p')\gamma^\nu\frac{\not{p}-\not{k}'+m}{(p-k')^2-m^2+i\epsilon}\gamma^\mu u_r(p)$$

$$=-ie^2\epsilon_\mu(k)\epsilon^*_\nu(k')\overline{u_r}(p')\gamma^\nu\left(\frac{\not{p}+\not{k}+m}{(p+k)^2-m^2+i\epsilon}+\frac{\not{p}-\not{k}'+m}{(p-k')^2-m^2+i\epsilon}\right)\gamma^\mu u_r(p)$$

$$=-ie^2\epsilon_\mu(k)\epsilon^*_\nu(k')\mathcal{M}^{\mu\nu}$$

$$|\mathcal{M}_T|^2 = \mathcal{M}_T \mathcal{M}_T^*$$
$$\mathcal{M}_T^* = \left(-ie^2 \epsilon_\mu(k) \epsilon_\nu^*(k') \mathcal{M}^{\mu\nu}\right)^*$$
$$= ie^2 \epsilon_\mu^*(k) \epsilon_\nu(k') (\mathcal{M}^{\mu\nu})^\dagger$$
$$(\mathcal{M}^{\mu\nu})^\dagger = \left(\overline{u_r}(p')\gamma^\nu \left(\frac{\not{p}+\not{k}+m}{(p+k)^2-m^2+i\epsilon} + \frac{\not{p}-\not{k'}+m}{(p-k')^2-m^2+i\epsilon}\right)\gamma^\mu u_r(p)\right)^\dagger$$
$$= \overline{u_r}(p)\gamma^\mu \left(\frac{\not{p}+\not{k}+m}{(p+k)^2-m^2+i\epsilon} + \frac{\not{p}-\not{k'}+m}{(p-k')^2-m^2+i\epsilon}\right)\gamma^\nu u_r(p')$$
$$|\mathcal{M}_T|^2 = \left(-ie^2 \epsilon_\mu(k) \epsilon_\nu^*(k') \mathcal{M}^{\mu\nu}\right)^*$$
$$= (-ie^2 \epsilon_\mu(k) \epsilon_\nu^*(k') \mathcal{M}^{\mu\nu})(ie^2 \epsilon_\alpha^*(k) \epsilon_\beta(k') (\mathcal{M}^{\alpha\beta})^\dagger)$$

Nótese que finalmente cambiamos los índices de la parte del conjugado, esto no afecta en nada el resultado pues son úndices mudos pero más adelante nos serán útiles.

$$|\mathcal{M}_T|^2 = e^4 \epsilon_\mu(k) \epsilon_\alpha^*(k) \epsilon_\nu^*(k') \epsilon_\beta(k') \mathcal{M}^{\mu\nu} (\mathcal{M}^{\alpha\beta})^\dagger$$

Ahora promediamos las polarizaciones iniciales y sumamos las finales. Haciendo uso de $\sum_r \epsilon_\mu^r \epsilon_\nu^{r*} = -g_{\mu\nu}$. Obtenemos:

$$\frac{1}{2}\sum_{pol} |\mathcal{M}_T| = \frac{1}{2} e^4 \sum_{pol} \epsilon_\mu(k) \epsilon_\alpha^*(k) \sum_{pol} \epsilon_\nu^*(k') \epsilon_\beta(k') \mathcal{M}^{\mu\nu} (\mathcal{M}^{\alpha\beta})^\dagger$$
$$\frac{1}{2} e^4 (-g_{\mu\alpha})(-g_{\nu\beta}) \mathcal{M}^{\mu\nu} (\mathcal{M}^{\alpha\beta})^\dagger = \frac{1}{2} e^4 \mathcal{M}^{\mu\nu} \mathcal{M}_{\mu\nu}^\dagger$$
$$\mathcal{M}^{\mu\nu} \mathcal{M}_{\mu\nu}^\dagger = \overline{u_r}(p')\gamma^\nu \left(\frac{\not{p}+\not{k}+m}{(p+k)^2-m^2+i\epsilon} + \frac{\not{p}-\not{k'}+m}{(p-k')^2-m^2+i\epsilon}\right)\gamma^\mu u_{r'}(p) \times$$
$$\overline{u_{r'}}(p)\gamma^\mu \left(\frac{\not{p}+\not{k}+m}{(p+k)^2-m^2+i\epsilon} + \frac{\not{p}-\not{k'}+m}{(p-k')^2-m^2+i\epsilon}\right)\gamma^\nu u_r(p')$$

Ahora si tenemos en cuenta el promedio de todas los spines y usando la propiedad: $\sum_s u_j^s(p)\overline{u}_k^s(p)) = (\not{p} + m_e)$ y obtenemos:

$$\frac{1}{2}\sum_{r,r'} \frac{1}{2}\sum_{pol} |\mathcal{M}_T| = \frac{1}{2}\sum_{r,r'} \frac{1}{2} e^4 \mathcal{M}^{\mu\nu} \mathcal{M}_{\mu\nu}^\dagger$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{pol} \frac{1}{2} e^4 \sum_{r,r'} \overline{u_r}(p')\gamma^\nu \left(\frac{\not{p}+\not{k}+m}{(p+k)^2-m^2+i\epsilon} + \frac{\not{p}-\not{k'}+m}{(p-k')^2-m^2+i\epsilon}\right)\gamma^\mu u_{r'}(p) \times$$
$$\overline{u_{r'}}(p)\gamma_\mu \left(\frac{\not{p}+\not{k}+m}{(p+k)^2-m^2+i\epsilon} + \frac{\not{p}-\not{k'}+m}{(p-k')^2-m^2+i\epsilon}\right)\gamma_\nu u_r(p')$$
$$\frac{1}{2}\sum_{pol} \frac{1}{2}\sum_r e^4 \overline{u_r}(p')\gamma^\nu \left(\frac{\not{p}+\not{k}+m}{(p+k)^2-m^2+i\epsilon} + \frac{\not{p}-\not{k'}+m}{(p-k')^2-m^2+i\epsilon}\right)\gamma^\mu (\not{p}+m_e) \times$$
$$\gamma_\mu \left(\frac{\not{p}+\not{k}+m}{(p+k)^2-m^2+i\epsilon} + \frac{\not{p}-\not{k'}+m}{(p-k')^2-m^2+i\epsilon}\right)\gamma_\nu u_r(p')$$

Ahora si tratamos de reducir la notacion y miramos la relacion que acabamos de encontrar.

$$M = \gamma^\nu \left(\frac{\not{p} + \not{k} + m}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{\not{p} - \not{k'} + m}{(p-k')^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \gamma^\mu$$
$$\times (\not{p} + m_e) \gamma_\mu \left(\frac{\not{p} + \not{k} + m}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{\not{p} - \not{k'} + m}{(p-k')^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \gamma_\nu$$
$$\frac{1}{2} \sum_{r,r'} \frac{1}{2} \sum_{pol} |\mathcal{M}_T| = \frac{1}{4} e^4 \sum_r \overline{u_r} M u_r(p') = \frac{1}{4} e^4 \sum_r M \overline{u_r} u_r(p') = \frac{1}{4} e^4 \sum_r M(p_3 + m) =$$
$$\frac{1}{4} e^4 \sum_r T_r \left(M(p_3 + m) \right)$$

Ahora para simplificar el cálculo de la traza, solamente vamos a tener en cuenta un solo término por factor, debido a que necesitamos masas de órdenes 4 de tal manera que obtenemos:

$$I_4 = \frac{1}{4} e^4 m^4 T_r \left[\left(\frac{\gamma^\nu \gamma^\mu}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{\gamma^\nu \gamma^\mu}{(p-k')^2 - m^2} \right) \times \left(\frac{\gamma_\mu \gamma_\nu}{(p+k)^2 - m^2} + \frac{\gamma_\mu \gamma_\nu}{(p-k')^2 - m^2} \right) \right]$$
$$= \frac{1}{4} e^4 m^4 T_r \left[\left(\frac{\gamma^\nu \gamma^\mu ((p+k)^2 - m^2) + ((p-k')^2 - m^2)}{[(p+k)^2 - m^2]\,[(p-k')^2 - m^2]} \right) \times \right.$$
$$\left. \left(\frac{\gamma_\mu \gamma_\nu ((p+k)^2 - m^2) + ((p-k')^2 - m^2)}{[(p+k)^2 - m^2]\,[(p-k')^2 - m^2]} \right) \right]$$
$$\frac{1}{4} e^4 m^4 T_r \left[\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu \gamma_\nu \left(\frac{((p+k)^2 - m^2)^2 + 2((p+k)^2 - m^2)((p-k')^2 - m^2) + ((p-k')^2 - m^2)^2}{[(p+k)^2 - m^2]^2\,[(p-k')^2 - m^2]^2} \right) \right]$$

Usando la propiedad de los cuadrivectores obtenemos:

$$\frac{1}{4} e^4 m^4 T_r \left[\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu \gamma_\nu \left(\frac{(m^2 - m^2 + p \cdot k)^2 + 2(m^2 + 2p \cdot k - m^2)((m^2 - 2p \cdot k' - m^2) + (m^2 - 2p \cdot k' - m^2)^2}{[(p+k)^2 - m^2]^2\,[(p-k')^2 - m^2]^2} \right) \right]$$
$$\frac{1}{4} e^4 m^4 T_r \left[\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu \gamma_\nu \left(\frac{(2p \cdot k)^2 + 2(2p \cdot k)((-2p \cdot k') + (-2p \cdot k')^2}{(2p \cdot k)^2 (2p \cdot k')^2} \right) \right]$$
$$2e^4 T_r \left[\frac{p \cdot k}{p \cdot k'} + \frac{p \cdot k'}{p \cdot k} + \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right) \left(2m^2 + m^4 \left(\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right) \right) \right]$$

Ahora sí podemos calcular la sección eficaz, que está dada por :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{cm} = \frac{1}{64\pi^2 (E_1 + E_2)^2} \frac{\left| \vec{P}_1' \right|}{\left| \vec{P}_1 \right|} \prod_l (2ml) |\mathcal{M}_T|^2$$

Nota: Esta fórmula fue tomada del libro de apuntes del profesor Sanabria. Por otra parte es fácil darse de cuenta que:

$$\frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} = \frac{1}{m} (cos(\theta) - 1)$$

Y por último, asumismos el hecho de que en la sección transversal el ángulo sólido viene con coseno, entonces finalmente reemplazando todo:

$$\frac{d\sigma}{dcos(\theta)} = \frac{e^4}{16\pi}\frac{k'}{m^2k - mk^2(1-cos(\theta))}|\mathcal{M}_T|^2$$
$$= \frac{e^4}{16\pi}\left(\frac{k'^2}{mk^2}\right)\left[\frac{p\cdot k}{p\cdot k'} + \frac{p\cdot k'}{p\cdot k} + \left(\frac{1}{p\cdot k} - \frac{1}{p\cdot k'}\right)\left(2m^2 + m^4\left(\frac{1}{p\cdot k} - \frac{1}{p\cdot k'}\right)\right)\right]$$

Que al pasarlo a frecuencia, en unidades naturales obtenemos:

$$\frac{d\sigma}{dcos(\theta)} = \frac{e^4}{16\pi}\left(\frac{\omega'^2}{m^2\omega^2}\right)\left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} + \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'}\right)\left(2m^2 + m^4\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'}\right)\right)\right]$$
$$= \frac{e^4}{16\pi}\left(\frac{\omega'^2}{m^2\omega^2}\right)\left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} + \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'}\right)\left(2m^2 + m^4\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'}\right)\right)\right]$$
$$= \frac{e^4}{16\pi}\left(\frac{\omega'^2}{m^2\omega^2}\right)\left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - sin^2(\theta)\right)$$

17)

Tomamos los niveles de baja Energía, es decir clásicos. Entonces $\omega' \to \omega \to 0$:

$$\frac{d\sigma}{dcos(\theta)} = \frac{e^4}{16\pi}\left(\frac{\omega'^2}{m^2\omega^2}\right)\left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - sin^2(\theta)\right) \to \frac{e^4}{16\pi m^2}\left(2 - sin^2(\theta)\right)$$

$$d\sigma = \frac{e^4}{16\pi m^2}\left(1 + cos^2(\theta)\right) dcos(\theta) \Rightarrow \sigma = \frac{e^4}{16\pi m^2}\int_0^{\pi/2}\left(2 - sin^2(\theta)\right) dcos(\theta)$$

$$= \frac{e^4}{16\pi m^2}\int_0^1 \left(2 - x^2\right) dx$$

$$= \frac{e^4}{16\pi m^2}(2 - \frac{1}{3}) = \frac{e^4}{6\pi m^2}$$

Y esto es lo que muchos libros muestran como:

$$\sigma = \frac{e^4}{16\pi m^2}(2 - \frac{1}{3}) = \sigma = \frac{e^4}{16\pi m^2}(2x - \frac{x^2}{3}) = \frac{e^4}{6\pi m^2} = \frac{8e^4\alpha}{3\pi m^2}$$

Finalmente al graficar la sección eficaz normalizada, nos encontramos con la siguiente imagen:

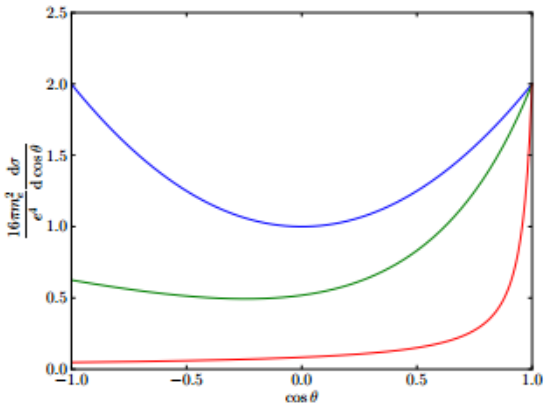


Figura 2: Sección eficaz del Scattering de Compton.

La función azul corresponde a un nivel alto de energía donde ω' alrededor de 5 veces ω La gráfica verde muesta a ω' alrededor de 2 veces ω, mientras que en la roja ambos parametros son aproximadamente iguales y tendiendo a 0 (límite clásico). Esta imagen fue sacada de literatura disponible en: