Tarea 2 de partículas

Sergio Gutiérrez - Javier Zúñiga -
Elkin Alvis -

29 de Agosto de 2016

1. Punto 4

Tenemos el conujnto $P = \left\{(\Lambda, \alpha) \mid \Lambda \in L_+^{\uparrow}\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}^4 \right\}$ con la operación de "multiplicación"definida como $(\Lambda', \alpha')(\Lambda, \alpha) = (\Lambda'\Lambda, \Lambda'\alpha + \alpha')$ con este conjunto y esta operacion comprobemos si cumplen las siguentes condiciones:

- Asocitividad
  Escogemos $(\Lambda, \alpha), (\Lambda', \alpha'), (\Lambda'', \alpha'') \in P$ y calculamos el producto de estas:

$$\begin{aligned}((\Lambda, \alpha)(\Lambda', \alpha'))\,(\Lambda'', \alpha'') &= ((\Lambda, \alpha)(\Lambda', \alpha'))\,(\Lambda'', \alpha'') \\ &= (\Lambda\Lambda', \Lambda\alpha' + \alpha)\,(\Lambda'', \alpha'') \\ &= (\Lambda\Lambda'\Lambda'', \Lambda\Lambda'\alpha'' + \Lambda\alpha' + \alpha) \\ (\Lambda, \alpha)\,((\Lambda', \alpha')(\Lambda'', \alpha'')) &= (\Lambda, \alpha)\,(\Lambda'\Lambda'', \Lambda'\alpha'' + \alpha') \\ &= (\Lambda, \alpha)\,(\Lambda'\Lambda'', \Lambda'\alpha'' + \alpha') \\ &= (\Lambda\Lambda'\Lambda'', \Lambda\Lambda'\alpha'' + \Lambda\alpha' + \alpha)\end{aligned}$$

  Entonces respeta la asociatividad.

- Identidad
  Con $(\Lambda, \alpha), (\Lambda', \alpha') \in P$ buscamos un elemento(Λ', α') tal que:

$$\begin{aligned}(\Lambda, \alpha)(\Lambda', \alpha') &= (\Lambda', \alpha')(\Lambda, \alpha) = (\Lambda, \alpha) \\ (\Lambda', \alpha')(\Lambda, \alpha) &= (\Lambda'\Lambda, \Lambda'\alpha + \alpha')\end{aligned}$$

  si selecionamos $(\Lambda', \alpha') = (\mathbb{I}, 0)$ podemos ver que el producto seria

$$\begin{aligned}(\Lambda, \alpha)(\Lambda', \alpha') &= (\Lambda\mathbb{I}, \Lambda 0 + \alpha) = (\Lambda, \alpha) \\ (\Lambda', \alpha')(\Lambda, \alpha) &= (\mathbb{I}\Lambda, \mathbb{I}\alpha + 0) = (\Lambda, \alpha)\end{aligned}$$

- Existencia de Inversa
  Ahora buscamos mostrar : $\forall\ (\Lambda, \alpha) \in P\ \exists\ (\Lambda', \alpha') \in P \mid (\Lambda', \alpha')(\Lambda, \alpha) = (\mathbb{I}, 0)$:

$$\begin{aligned}(\Lambda, \alpha)(\Lambda', \alpha') &= (\Lambda', \alpha')(\Lambda, \alpha) \\ (\Lambda', \alpha')(\Lambda, \alpha) &= (\Lambda'\Lambda, \Lambda'\alpha + \alpha') \\ (\Lambda, \alpha)(\Lambda', \alpha') &= (\Lambda\Lambda', \Lambda\alpha' + \alpha)\end{aligned}$$

para al primera coordena la única matriz que cumple con $\Lambda\Lambda' = \Lambda'\Lambda = \mathbb{I}$ es si $\Lambda' = \Lambda^{-1}$ y para la segunda coordenada tenemos que $\Lambda'\alpha + \alpha' = \Lambda\alpha' + \alpha = 0$ entontces es claro que $\alpha' = -\Lambda^{-1}\alpha$ asi que la inversa tine la forma de $(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}\alpha)$

Ahora podemos encontrar una representación matricial para las transformaciones de Poincaré. Así cada elemento en este grupo se representa como:

$$(\Lambda, \alpha) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} \Lambda & \alpha \\ \hline \vec{0} & 1 \end{array}\right]$$

Comprobemos que definiendo esta representación matricial se respeta el producto del grupo de Poincaré al hacer el producto de matrices.

$$\left[\begin{array}{c|c} \Lambda' & \alpha' \\ \hline \vec{0} & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \Lambda & \alpha \\ \hline \vec{0} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda'\Lambda & \Lambda'\alpha + \alpha' \\ \hline \vec{0} & 1 \end{array}\right]$$

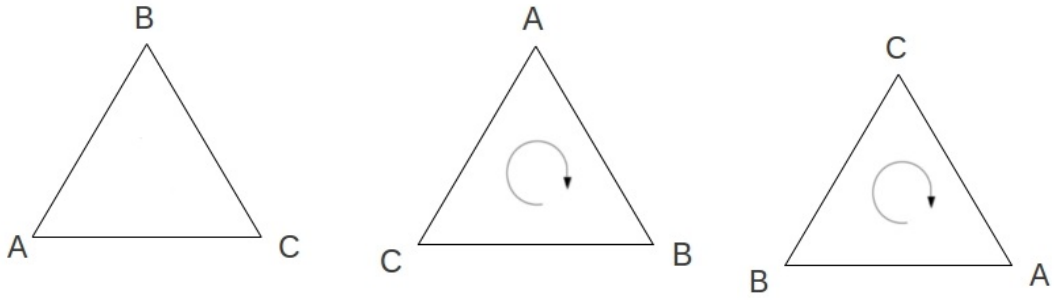
$$\left[\begin{array}{c|c} \Lambda'\Lambda & \Lambda'\alpha + \alpha' \\ \hline \vec{0} & 1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow (\Lambda'\Lambda, \Lambda'\alpha + \alpha')$$

2. Punto 5

a)

Para el triángulo equilatero enunciaremos y mostraremos cada una de las operaciones del grupo de simetría G:

En primer lugar tenemos las operaciones correspondientes a las rotafciones. Llamaremos e a la operación que me deja inamovible el triángulo, $R1$ la que rota el triángulo 120° y $R2$ la que rota al triángulo 240°. Como se muestra a continuación

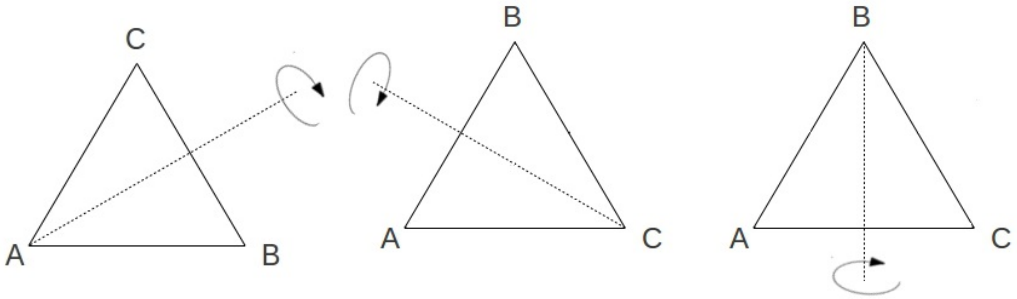


(a) R1 (b) R2 (c) R3

Figura 1: Operaciones de rotacion del triángulo.

El segundo grupo de operaciones con las que cuenta el triángulo son las reflexiones. Llamaremos $L1$ a la reflexión que se realiza con respecto a la bicectriz que pasa por el vértice ubicado en $\measuredangle BAC$, $L2$ a la reflexión que se realiza con respecto a la bicectriz que pasa por el vértice que ubicado en $\measuredangle ABC$ y $L3$ a la reflexión que se realiza con respecto a la bicectriz que pasa por el vértice que

ubicado en $\measuredangle ABC$ y $L3$ con respecto a la figura 1a.



(a) L1 (b) L2 (c) L3

Figura 2: Operaciones de reflexiones del triángulo.

A continuación realizaremos la tabla de multiplicar entre operaciones:

Cuadro 1: My caption

	e	**R1**	**R2**	**L1**	**L2**	**L3**
e	e	R1	R2	L1	L2	L3
R1	R1	R2	e	L2	L3	L1
R2	R2	e	R1	L3	L1	L2
L1	L1	L3	L2	e	R2	R1
L2	L2	L1	L3	R1	e	R2
L3	L3	L2	L1	R2	R1	e

Adoptaremos la notación $[A, B, C]$ que significan el orden de los vértices del triángulo, mientras que $(1, 2)$ es el cambio en el orden de las posiciones del mismo.
e:

$$e[A, B, C] \quad \rightarrow \quad [A, B, C]$$

R1:

$$R1[A, B, C] \quad \xrightarrow{(1,3)(2,3)} \quad [C, A, B]$$

R2:

$$R2[A, B, C] \quad \xrightarrow{(1,3)(2,1)} \quad [B, C, A]$$

L1

$$L1[A, B, C] \quad \xrightarrow{(2,3)} \quad [A, C, B]$$

L2

$$L2[A, B, C] \quad \xrightarrow{(1,3)} \quad [C, B, A]$$

L3

$$L3[A, B, C] \quad \xrightarrow{(1,2)} \quad [B, A, C]$$

Ahora es fácil ver lo siguiente:

$$R1R2[A,B,C] \quad \Rightarrow_{(1,2)(2,3)(1,3)(2,1)} \quad [A,B,C] \Rightarrow [B,A,C] \Rightarrow [B,C,A] \Rightarrow [A,C,B] \Rightarrow [A,B,C] = e[A,B,C]$$

$$R1L1[A,B,C] \quad \xrightarrow{(1,2)(2,3)(2,3)} \quad [A,B,C] \rightarrow [B,A,C] \rightarrow [B,C,A] \Rightarrow [B,A,C] = L3[A,B,C]$$

$$L1L2[A,B,C] \quad \xrightarrow{(2,3)(1,3)} \quad \text{por definición eso es:} R1[A,B,C]$$

Lo que implica que se pueden ver cada una de las transformaciones como permutaciones y a su vez pueden ser factorizadas por otras transformaciones dentro del mismo grupo.

(b)

Usando el hecho de que:

$$\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Y notando también de que cada ángulo del triángulo equilátero tiene $60°$, obtenemos para cada rotación:

$$e = \begin{pmatrix} cos(0) & -sin(0) \\ sin(0) & cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R1 = \begin{pmatrix} cos(120°) & -sin(120°) \\ sin(120°) & cos(120°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$R2 = \begin{pmatrix} cos(240°) & -sin(240°) \\ sin(240°) & cos(240°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora, para realizar las matrices de reflexión con respecto a cada bicectriz, debemos primero de obtener las ecuaciones de las mismas.Es importante notar que para todas las rotaciones se realizará el mismo procedimiento:

Para el primer ejemplo ha de notarse que el ángulo de la bicectriz con respecto a la horizontal es de $30°$, por tanto:

$$tan\,(30°) = \frac{y}{x}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{y}{x}$$

Entonces: el vector que corresponde a dicha bicectriz es de:

$$\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

Mientras que el vector perpendicular corresponde a:

$$\vec{b_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Reescribimos los vectores de la base canónica en dichos vectores.

$$e_1 = \left(\frac{3}{4}\right)\vec{b_1} + \left(-\frac{1}{4}\right)\vec{b_2}$$
$$e_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\vec{b_1} + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\vec{b_2}$$

Entonces para la reflexión quermos que el vector b_1 permanezca igual mientras que b_2 sea $-b_2$Entonces la matriz procede de la siguiente manera:

$$T(e_1) = T\left(\left(\frac{3}{4}\right)\vec{b_1} + \left(-\frac{1}{4}\right)\vec{b_2}\right)$$
$$T(e_2) = T\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\vec{b_1} + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\vec{b_2}\right)$$
$$T(e_1) = \left(\frac{3}{4}\right)T\left(\vec{b_1}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)T\left(\vec{b_2}\right)$$
$$T(e_2) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)T\left(\vec{b_1}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)T\left(\vec{b_2}\right)$$

Entonces la matriz de cambio de coordenadas corresponde a:

$$L1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Al realizar el mismo procedimiento en las otras dos rotaciones obtenemos:

$$L2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, L3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizamos el mismo procedimiento pero para un espacio $\mathcal{R}_3$ cuyas matrices son de 3×3. Utilizando el hecho de que se habla de rotaciones y reflexiones que finalmente son permutaciones podemos escribir dichas matrices como:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, R2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$L1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, L2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)
Utilizando los puntos, obtenemos primero los vectores generadores ortogonales del plano. Entonces:

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v_2} = \begin{bmatrix} \vec{v_{2x}} & \vec{v_{2y}} & \vec{v_{2x}} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para realizar la matriz de representación irreducible, es necesario tomar la representación siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

Donde se denota σ como la matriz 2×2 cuyos vectores $\vec{u_1}$ y $\vec{u_2}$ son respectivamente $\vec{v_1} - \vec{v_2}$ y $\vec{v_2} - \vec{v_3}$. Realizando dicho procedimiento calculamos:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , R1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ , R2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ , L2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ , L3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Punto 6

Queremos obtener la forma matricial para la regla de transformación de un vector bajo rotaciones $\vec{x}' = (1 - \cos\psi)(\hat{\psi} \cdot \vec{x})\hat{\psi} + \cos\psi\vec{x} - (\sin\psi)\hat{\psi} \times \vec{x} \Longrightarrow \vec{x}' = \mathbb{G}\vec{x}$ reorganizando términos de la rotación :

$$\begin{aligned} \vec{x}' =& (1 - \cos\psi)(\hat{\psi} \cdot \vec{x})\hat{\psi} + \cos\psi\vec{x} - (\sin\psi)\hat{\psi} \times \vec{x} \\ =& (1 - \cos\psi)(\hat{\psi} \cdot \vec{x})\hat{\psi} + \cos\psi\vec{x} - (\sin\psi)\hat{\psi} \times \vec{x} - \vec{x} + \vec{x} \\ =& (1 - \cos\psi)(\hat{\psi} \cdot \vec{x})\hat{\psi} - \vec{x}(1 - \cos\psi) - (\sin\psi)\hat{\psi} \times \vec{x} + \vec{x} \\ =& (1 - \cos\psi)((\hat{\psi} \cdot \vec{x})\hat{\psi} - \vec{x}) - (\sin\psi)\hat{\psi} \times \vec{x} + \vec{x} \end{aligned}$$

si miramos la nueva expresión que tenemos podemos observar que si encontrasemos unas expresiones equivalentes de los términos $(\hat{\psi} \cdot \vec{x})\hat{\psi} - \vec{x} = \mathcal{M}\vec{x}$, $\hat{\psi} \times \vec{x} = \mathcal{N}\vec{x}$ podriamos simplificar la transformación a una suma de matrices.

- $(\hat{\psi}\cdot\vec{x})\hat{\psi}-\vec{x}$:

$$\begin{pmatrix} \hat{\psi}_1x_1+\hat{\psi}_2x_2+\hat{\psi}_3x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\psi}_1\\ \hat{\psi}_2\\ \hat{\psi}_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\hat{\psi}_1x_1+\hat{\psi}_2x_2+\hat{\psi}_3x_3)\hat{\psi}_1-x_1\\ (\hat{\psi}_1x_1+\hat{\psi}_2x_2+\hat{\psi}_3x_3)\hat{\psi}_2-x_2\\ (\hat{\psi}_1x_1+\hat{\psi}_2x_2+\hat{\psi}_3x_3)\hat{\psi}_3-x_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\hat{\psi}_1^2x_1+\hat{\psi}_2\hat{\psi}_1x_2+\hat{\psi}_3\hat{\psi}_1x_3-x_1\\ \hat{\psi}_1\hat{\psi}_2x_1+\hat{\psi}_2^2x_2+\hat{\psi}_3\hat{\psi}_2x_3-x_2\\ \hat{\psi}_1\hat{\psi}_3x_1+\hat{\psi}_2\hat{\psi}_3x_2+\hat{\psi}_3^2x_3-x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\hat{\psi}_1^2-1)x_1+\hat{\psi}_2\hat{\psi}_1x_2+\hat{\psi}_3\hat{\psi}_1x_3\\ \hat{\psi}_1\hat{\psi}_2x_1+(\hat{\psi}_2^2-1)x_2+\hat{\psi}_3\hat{\psi}_2x_3\\ \hat{\psi}_1\hat{\psi}_3x_1+\hat{\psi}_2\hat{\psi}_3x_2+(\hat{\psi}_3^2-1)x_3\end{pmatrix}$$

$$(\hat{\psi}\cdot\vec{x})\hat{\psi}-\vec{x}=\begin{pmatrix}\hat{\psi}_1^2-1 & \hat{\psi}_2\hat{\psi}_1 & \hat{\psi}_3\hat{\psi}_1\\ \hat{\psi}_1\hat{\psi}_2 & \hat{\psi}_2^2-1 & \hat{\psi}_3\hat{\psi}_2\\ \hat{\psi}_1\hat{\psi}_3 & \hat{\psi}_2\hat{\psi}_3 & \hat{\psi}_3^2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\mathcal{M}\vec{x}$$

- $\hat{\psi}\times\vec{x}$:

$$\begin{vmatrix} i & j & k\\ \hat{\psi}_1 & \hat{\psi}_2 & \hat{\psi}_3\\ x_1 & x_2 & x_3\end{vmatrix}=(\hat{\psi}_2x_3-\hat{\psi}_3x_2,\hat{\psi}_3x_1-\hat{\psi}_1x_3,\hat{\psi}_1x_2-\hat{\psi}_2x_1)$$

$$\hat{\psi}\times\vec{x}=\begin{pmatrix}0 & -\hat{\psi}_3 & \hat{\psi}_2\\ \hat{\psi}_3 & 0 & -\hat{\psi}_1\\ -\hat{\psi}_2 & \hat{\psi}_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\mathcal{N}\vec{x}$$

exploraremos las potencias de $\mathcal{N}$:

$$\mathcal{N}=\begin{pmatrix}0 & -\hat{\psi}_3 & \hat{\psi}_2\\ \hat{\psi}_3 & 0 & -\hat{\psi}_1\\ -\hat{\psi}_2 & \hat{\psi}_1 & 0\end{pmatrix},\ \mathcal{N}^2=\begin{pmatrix}0 & -\hat{\psi}_3 & \hat{\psi}_2\\ \hat{\psi}_3 & 0 & -\hat{\psi}_1\\ -\hat{\psi}_2 & \hat{\psi}_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\hat{\psi}_3 & \hat{\psi}_2\\ \hat{\psi}_3 & 0 & -\hat{\psi}_1\\ -\hat{\psi}_2 & \hat{\psi}_1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{N}^2=\begin{pmatrix}-\hat{\psi}_3^2-\hat{\psi}_2^2 & \hat{\psi}_1\hat{\psi}_2 & \hat{\psi}_3\hat{\psi}_1\\ \hat{\psi}_2\hat{\psi}_1 & -\hat{\psi}_3^2-\hat{\psi}_1^2 & \hat{\psi}_3\hat{\psi}_2\\ \hat{\psi}_1\hat{\psi}_3 & \hat{\psi}_2\hat{\psi}_3 & -\hat{\psi}_2^2-\hat{\psi}_1^2\end{pmatrix}$$

Sabemos que como $\left\|\hat{\psi}\right\|^2=1\longrightarrow n_1^2+n_3^2+n_2^2=1\longrightarrow -n_j^2-n_i^2=n_k^2-1$ así que podemos aplicar esto a $\mathcal{N}^2$:

$$\mathcal{N}^2=\begin{pmatrix}\hat{\psi}_1^2-1 & \hat{\psi}_2\hat{\psi}_1 & \hat{\psi}_3\hat{\psi}_1\\ \hat{\psi}_1\hat{\psi}_2 & \hat{\psi}_2^2-1 & \hat{\psi}_3\hat{\psi}_2\\ \hat{\psi}_1\hat{\psi}_3 & \hat{\psi}_2\hat{\psi}_3 & \hat{\psi}_3^2-1\end{pmatrix}=\mathcal{M}$$

Así que podemos ver que $\mathcal{N}$ tiene unas propiedades especiales tal que indagemos más sobre las potencias de esta:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^3 &= \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1^2-1 & \hat{\psi}_2\hat{\psi}_1 & \hat{\psi}_3\hat{\psi}_1 \\ \hat{\psi}_1\hat{\psi}_2 & \hat{\psi}_2^2-1 & \hat{\psi}_3\hat{\psi}_2 \\ \hat{\psi}_1\hat{\psi}_3 & \hat{\psi}_2\hat{\psi}_3 & \hat{\psi}_3^2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\hat{\psi}_3 & \hat{\psi}_2 \\ \hat{\psi}_3 & 0 & -\hat{\psi}_1 \\ -\hat{\psi}_2 & \hat{\psi}_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\psi}_3\hat{\psi}_2\hat{\psi}_1-\hat{\psi}_3\hat{\psi}_2\hat{\psi}_1=0 & -\hat{\psi}_3(\hat{\psi}_1^2-1)+\hat{\psi}_1^2\hat{\psi}_3 & \hat{\psi}_2(\hat{\psi}_1^2-1)-\hat{\psi}_1^2\hat{\psi}_2 \\ \hat{\psi}_3(\hat{\psi}_2^2-1)-\hat{\psi}_3\hat{\psi}_2\hat{\psi}_1 & \hat{\psi}_3\hat{\psi}_2\hat{\psi}_1-\hat{\psi}_3\hat{\psi}_2\hat{\psi}_1=0 & \hat{\psi}_1\hat{\psi}_2^2-\hat{\psi}_1(\hat{\psi}_2^2-1) \\ \hat{\psi}_2\hat{\psi}_3^2-\hat{\psi}_2(\hat{\psi}_3^2-1) & -\hat{\psi}_3^2\hat{\psi}_1+\hat{\psi}_1(\hat{\psi}_3^2-1) & \hat{\psi}_3\hat{\psi}_2\hat{\psi}_1-\hat{\psi}_1\hat{\psi}_2\hat{\psi}_3=0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \hat{\psi}_3 & -\hat{\psi}_2 \\ -\hat{\psi}_3 & 0 & \hat{\psi}_1 \\ \hat{\psi}_2 & -\hat{\psi}_1 & 0 \end{pmatrix} = -\mathcal{N}\end{aligned}$$

Podemos ver que existe una representación par las potencias de N:

$$\mathcal{N}^k = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}+1}\mathcal{M} & si\ k\ es\ par \\ (-1)^{\frac{k+1}{2}+1}\mathcal{N} & si\ k\ es\ inpar \end{cases}$$

Ahora encontramos una expresión matricial para la regla de transformación de la forma $\vec{x}' = (1-\cos\psi)\mathcal{M}\vec{x} + \vec{x} - (\sin\psi)\mathcal{N}\vec{x} \Longrightarrow \vec{x}' = ((1-\cos\psi)\mathcal{M} + \mathbb{I} - (\sin\psi)\mathcal{N})\,\vec{x} \Longrightarrow\ \vec{x}' = \mathbb{G}\vec{x}$ consideremos el caso en el que se haga una rotación $\triangle\,\psi \ll 1$ aplicando las aproximaciones para ángulos pequeños $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2},\ \operatorname{sen}\theta \approx \theta$,

$$\vec{x}' = ((1-\cos\psi)\mathcal{M} + \mathbb{I} - (\sin\psi)\mathcal{N})\,\vec{x} \xrightarrow{\triangle\psi \ll 1} \vec{x}' = \left((1-(1-\frac{\triangle\,\psi^2}{2}))\mathcal{M} + \mathbb{I} - (\triangle\,\psi)\mathcal{N}\right)\vec{x}$$

$$\vec{x}' = \left(\frac{\triangle\,\psi^2}{2}\mathcal{M} + \mathbb{I} - (\triangle\,\psi)\mathcal{N}\right)\vec{x} \xrightarrow{\triangle\psi^2 \approx 0} \vec{x}' = (\mathbb{I} - (\triangle\,\psi)\mathcal{N})\,\vec{x}$$

Si considermaos que $\triangle\,\psi = \frac{\psi}{n}$ si componemos rotaciones esta nos da una rotación equivalente si consideramos que vamos a componer una rotación finita apunto de rotaciones muy pequeñas podemos componer estas rotaciones de la siguiente forma:

$$\vec{x}' = \lim_{n\to\infty}\left(\mathbb{I} - \frac{\psi\mathcal{N}}{n}\right)^n\vec{x}\ ;\ e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \Longrightarrow \vec{x}' = e^{-\psi\mathcal{N}}\vec{x}$$

Tratemos de rescribir $\mathcal{N}$ en funcion de matrices más fundamentales:

$$\mathcal{N} = \psi_1 J_1 + \psi_2 J_2 + \psi_3 J_3 = \hat{\psi}\cdot\vec{J}$$

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{\psi}_3 & \hat{\psi}_2 \\ \hat{\psi}_3 & 0 & -\hat{\psi}_1 \\ -\hat{\psi}_2 & \hat{\psi}_1 & 0 \end{pmatrix}; \mathcal{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{N}=\psi_1 J_1 + \psi_2 J_2 + \psi_3 J_3 = \hat{\psi}\cdot\vec{J}$$

Con esta representacion de N podemos rescribir la transformacion de un vector bajo rotacion como: $\vec{x}' = e^{-\psi\hat{\psi}\cdot J}\vec{x} = e^{-\vec{\psi}\cdot J}\vec{x}$